Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

1.1 b) .... $\boxed{2^5}$

1.1 c) .... $\boxed{3}$

1.1 d) .... $\boxed{-2\times 3^{3k-2}}$

1.2 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

1.2 b) .... $\boxed{\dfrac{7}{15}}$

1.2 c) .... $\boxed{9}$

1.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

1.3 a) .... $\boxed{247}$

1.3 b) .... $\boxed{\dfrac{203}{24}}$

1.3 c) .... $\boxed{\dfrac{-10}{3}}$

1.3 d) .... $\boxed{1\ 000}$

1.4 .... $\boxed{\dfrac{16}{35}}$

1.5 a) .... $\boxed{2\ 022}$

1.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

1.5 c) .... $\boxed{1}$

1.5 d) .... $\boxed{2}$

1.6 a) .... $\boxed{\dfrac{-1}{n(n+1)^2}}$

1.6 b) .... $\boxed{-\dfrac{ab}{a-b}}$

1.6 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}n}$

1.7 .... $\boxed{\dfrac{n^3+n}{n+1}}$

1.8 a) .... $\boxed{4+\dfrac{5}{6}}$

1.8 b) .... $\boxed{1+\dfrac{1}{k-1}}$

1.8 c) .... $\boxed{3+\dfrac{5}{x-2}}$

1.9 .... $\boxed{2t}$

1.10 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{5}>\dfrac{5}{9}}$

1.10 b) .... $\boxed{\dfrac{12}{11}>\dfrac{10}{12}}$

1.10 c) .... $\boxed{\dfrac{125}{25}=\dfrac{105}{21}}$

1.11 .... $\boxed{\text{Non}}$

1.12 .... $\boxed{A>B}$

Corrigés

1.1 a) $\dfrac{32}{40}=\dfrac{8\times 4}{8\times 5}=\dfrac{4}{5}$

1.1 b) $8^3\times\dfrac{1}{4^2}=(2\times 4)^3\times\dfrac{1}{4^2}=2^3\times 4^3\times\dfrac{1}{4^2}=2^3\times 4=2^5$

1.1 c) $\dfrac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4}=\dfrac{(3^3)^{-1}\times(2^2)^2}{3^{-4}\times 2^4}=\dfrac{3^4}{3^3}=3$

1.1 d) On a : $\dfrac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k\times 3^{-k+1}}=\dfrac{(-2)\times(-2)^{2k}\times 3^{2k}\times 3^{-1}}{4^k\times 3^{-k}\times 3}=\dfrac{(-2)\times 4^k\times 3^{2k}\times 3^k}{4^k\times 3^2}=-2\times 3^{3k-2}$.

1.2 a) On met au même dénominateur : $\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\times 3}{4\times 3}-\dfrac{1\times 4}{3\times 4}=\dfrac{6}{12}-\dfrac{4}{12}=\dfrac{6-4}{12}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.

1.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3}-0{,}2=\frac{2}{3}-\frac{2}{10}=\frac{2\times 10}{3\times 10}-\frac{2\times 3}{10\times 3}=\frac{20}{30}-\frac{6}{30}=\frac{20-6}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7\times 2}{15\times 2}=\frac{7}{15}.$$

1.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times 5=\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times\frac{5}{1}=\frac{36\times 15\times 5}{25\times 12\times 1}=\frac{12\times 3\times 5\times 3\times 5}{5\times 5\times 12\times 1}=\frac{3\times 3}{1}=\frac{9}{1}=9.$$

1.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15}\div(-\frac{6}{5})=-\frac{2}{15}\times(-\frac{5}{6})=\frac{2}{15}\times\frac{5}{6}=\frac{2\times 5}{15\times 6}=\frac{2\times 5}{3\times 5\times 2\times 3}=\frac{1}{9}.$$

1.3 a) On développe :

$$(2\times3\times5\times7)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}) = \frac{2\times3\times5\times7}{2}+\frac{2\times3\times5\times7}{3}+\frac{2\times3\times5\times7}{5}+\frac{2\times3\times5\times7}{7}$$
$$= 3\times5\times7+2\times5\times7+2\times3\times7+2\times3\times5 = 105+70+42+30 = 247.$$

1.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{62}{10}\right)\times\frac{21}{24} = \left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{31}{5}\right)\times\frac{7}{8}$$
$$= \left(\frac{136}{15}+\frac{3}{5}\right)\times\frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15}+\frac{9}{15}\right)\times\frac{7}{8} = \frac{145}{15}\times\frac{7}{8} = \frac{29}{3}\times\frac{7}{8} = \frac{203}{24}.$$

1.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10}\times7^3-25^5\times49^2}{(125\times7)^3+5^9\times14^3} = \frac{5^{10}\times7^3-5^{10}\times7^4}{5^9\times7^3+5^9\times7^3\times2^3} = \frac{5^{10}\times7^3(1-7)}{5^9\times7^3(1+2^3)} = \frac{5\times(-6)}{9} = \frac{-10}{3}.$$

1.3 d) On calcule :

$$\frac{1\,978\times1\,979+1\,980\times21+1\,958}{1\,980\times1\,979-1\,978\times1\,979} = \frac{1\,978\times1\,979+1\,979\times21+21+1\,958}{1\,979\times(1\,980-1\,978)}$$
$$= \frac{1\,979\times(1\,978+21)+1\,979}{1\,979\times2} = \frac{1\,979\times(1\,978+21+1)}{1\,979\times2} = \frac{1\,979\times2\,000}{1\,979\times2}$$
$$= 1\,000.$$

1.4 On calcule :

$$\frac{0{,}5-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{0{,}5-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0{,}2}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-3{,}5} = \frac{\frac{3}{6}-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-\frac{7}{2}}$$
$$= \frac{3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{5}-\frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

1.5 a) On connaît l'identité remarquable : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Donc : $\dfrac{2\,022}{(-2\,022)^2+(-2\,021)(2\,023)} = \dfrac{2\,022}{(2\,022)^2+(1-2\,022)\times(1+2\,022)} = \dfrac{2\,022}{(2\,022)^2+1-2\,022^2} = 2\,022.$

1.5 b) On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\frac{2\,021^2}{2\,020^2+2\,022^2-2} = \frac{2\,021^2}{(2\,021-1)^2+(2\,021+1)^2-2}$$
$$= \frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+1+2\,021^2+2\times2\,021\times1+1-2}$$
$$= \frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+2\,021^2+2\times2\,021\times1} = \frac{2\,021}{2\,021-2+2\,021+2} = \frac{1}{2}.$$

1.5 c) En posant $a=1\,234$, on a : $1\,235=a+1$ et $2\,469=2a+1$.

Donc : $\dfrac{1\,235\times2\,469-1\,234}{1\,234\times2\,469+1\,235} = \dfrac{(a+1)(2a+1)-a}{a(2a+1)+a+1} = \dfrac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1} = 1.$

1.5 d) En posant $a=1\,000$, on a : $999=a-1$, $1\,001=a+1$, $1\,002=a+2$ et $4\,002=2a+2$.

Donc : $\dfrac{4\,002}{1\,000\times1\,002-999\times1\,001} = \dfrac{4a+2}{a(a+2)-(a-1)(a+1)} = \dfrac{2(2a+1)}{a^2+2a-(a^2-1)} = \dfrac{2(2a+1)}{2a+1} = 2.$

1.6 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}$$
$$=\frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}.$$

1.6 b) On rappelle la formule : $a^3-b^3=(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)$. Cela donne :

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{ab+a^2+b^2}{a-b}-\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}=-\frac{ab}{a-b}.$$

1.6 c) Pour $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1,2\}$, on a :

$$\frac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}=\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}\times\frac{n^2(n-1)^2}{2n+2}=\frac{6(n+1)}{2(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{2(n+1)}=\frac{3}{2}n.$$

1.7 De $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, on a : $\displaystyle\frac{\sum_{k=0}^{n^2}k}{\sum_{k=0}^{n}k}=\frac{\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\frac{n^2(n^2+1)}{2}\,\frac{2}{n(n+1)}=\frac{n(n^2+1)}{n+1}=\frac{n^3+n}{n+1}.$

1.8 a) On trouve $\dfrac{29}{6}=\dfrac{4\times6+5}{6}=4+\dfrac{5}{6}$.

1.8 b) On trouve $\dfrac{k}{k-1}=\dfrac{k-1+1}{k-1}=1+\dfrac{1}{k-1}$.

1.8 c) On trouve $\dfrac{3x-1}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+5}{x-2}=3+\dfrac{5}{x-2}$.

1.9 Pour $t\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on a :

$$A=\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2}-\frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{1+2t+t^2-\big(1+t^2\big)}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

Donc, $AB=\left(\dfrac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}\right)\times\big(1+t^2\big)(1+t)^2=2t.$

1.10 a) $\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{45}>\dfrac{5}{9}=\dfrac{25}{45}$

1.10 c) $\dfrac{125}{25}=5=\dfrac{105}{21}$

1.11 Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A=B$, si et seulement si $33\ 215\times208\ 341=66\ 317\times104\ 348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impair, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.

1.12 On re-écrit $A=\dfrac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B=\dfrac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.

D'une part calculons : $(10^5+1)\times(10^7+1)=10^{12}+10^7+10^5+1$.

D'autre part : $(10^6+1)^2=10^{12}+2\times10^6+1$.

Comme $(10^5+1)\times(10^7+1)>(10^6+1)\times\ (10^6+1)$, on obtient : $A>B$.

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{10^8}$

2.1 b) .... $\boxed{10^{15}}$

2.1 c) .... $\boxed{10^2}$

2.1 d) .... $\boxed{10^{-2}}$

2.1 e) .... $\boxed{10^4}$

2.1 f) .... $\boxed{10^{-8}}$

2.2 a) .... $\boxed{15^4}$

2.2 b) .... $\boxed{5^{-6}}$

2.2 c) .... $\boxed{2^7}$

2.2 d) .... $\boxed{(-7)^{-2}}$

2.2 e) .... $\boxed{3^5}$

2.2 f) .... $\boxed{3^{28}}$

2.3 a) ...... $\boxed{2^{-4}\cdot 3^{-1}}$

2.3 b) .... $\boxed{2^{21}\cdot 3}$

2.3 c) .... $\boxed{2}$

2.3 d) .... $\boxed{2^{38}\cdot 3^{26}}$

2.4 a) .... $\boxed{8}$

2.4 b) .... $\boxed{11}$

2.4 c) .... $\boxed{3^{10}}$

2.4 d) .... $\boxed{2^6\cdot 5}$

2.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{x+1}}$

2.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x-2}}$

2.5 c) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x+1}}$

2.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2}{x-2}}$

Corrigés

2.3 a) $\dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 6^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 2^{-1}\cdot 3^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^{4-1}\cdot 2^{8-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^3\cdot 2^7} = 2^{3-7}\cdot 3^{2-3} = 2^{-4}\cdot 3^{-1}.$

2.3 b) On factorise : $2^{21}+2^{22} = 2^{21}+2^{21}\cdot 2 = 2^{21}\cdot(1+2) = 2^{21}\cdot 3.$

2.3 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} = \dfrac{(3+1)\cdot 3^{21}}{(3-1)\cdot 3^{21}} = \dfrac{4}{2} = 2.$

2.3 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\dfrac{\left(3^2\cdot(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\cdot 2^3\right)^{-2}} = \dfrac{3^{16}\cdot 2^{32}}{3^{-10}\cdot 2^{-6}} = 2^{38}\cdot 3^{26}.$

2.4 a) On fait apparaitre les facteurs premiers 2 et 3 : $\dfrac{8^{17}\cdot 6^{-6}}{9^{-3}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{3\cdot 17}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}}{3^{2\cdot(-3)}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{51-6}\cdot 3^{-6}}{3^{-6}\cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8.$

2.4 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\dfrac{55^2\cdot 121^{-2}\cdot 125^2}{275\cdot 605^{-2}\cdot 25^4} = \dfrac{(5\cdot 11)^2\cdot(11^2)^{-2}\cdot(5^3)^2}{5^2\cdot 11\cdot(11^2\cdot 5)^{-2}\cdot(5^2)^4} = \dfrac{5^8\cdot 11^{-2}}{5^8\cdot 11^{-3}} = 11.$

2.4 c) On fait apparaitre les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\dfrac{12^{-2}\cdot 15^4}{25^2\cdot 18^{-4}} = \dfrac{(2^2)^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^4\cdot 5^4}{(5^2)^2\cdot 2^{-4}\cdot(3^2)^{-4}} = \dfrac{2^{-4}\cdot 3^2\cdot 5^4}{2^{-4}\cdot 3^{-8}\cdot 5^4} = 3^{10}.$

2.4 d) Même méthode que précédemment : $\dfrac{36^3\cdot 70^5\cdot 10^2}{14^3\cdot 28^2\cdot 15^6} = \dfrac{2^6\cdot 3^6\cdot 2^5\cdot 5^5\cdot 7^5\cdot 2^2\cdot 5^2}{2^3\cdot 7^3\cdot 2^4\cdot 7^2\cdot 3^6\cdot 5^6} = \dfrac{2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^7\cdot 7^5}{2^7\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7^5} = 2^6\cdot 5.$

2.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x}{x+1}$

2.5 b) Même méthode : $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4} = \dfrac{2(x-2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

2.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x}{x+1}$

2.5 d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{x-2+x}{x(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{2}{x-2}$

Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}}$

3.1 b) .... $\boxed{x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1}$

3.1 c) .... $\boxed{x^5 - x^3 + x^2 - 1}$

3.1 d) .... $\boxed{x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1}$

3.1 e) .... $\boxed{x^5 - x^3 - x^2 + 1}$

3.1 f) .... $\boxed{x^4 + x^2 + 1}$

3.2 a) .... $\boxed{-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4}$

3.2 b) .... $\boxed{-28 + 21x}$

3.2 c) .... $\boxed{2 - x + x^3 - x^4 - x^5}$

3.2 d) .... $\boxed{-1 - 3x - 3x^2 + x^3}$

3.2 e) .... $\boxed{1 + x^4}$

3.2 f) .... $\boxed{1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4}$

3.3 a) .... $\boxed{-6(6x + 7)}$

3.3 b) .... $\boxed{4(5x + 4)(-5x + 1)}$

3.3 c) .... $\boxed{2(3x - 4)(10x + 3)}$

3.3 d) .... $\boxed{-8(x + 1)(x + 16)}$

3.4 a) .... $\boxed{(x - 1)^2}$

3.4 b) .... $\boxed{(x + 2)^2}$

3.4 c) .... $\boxed{(x + 1)(x + 2)}$

3.4 d) .... $\boxed{3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right)}$

3.4 e) .... $\boxed{2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right)}$

3.4 f) .... $\boxed{-5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right)}$

3.5 a) .... $\boxed{(x + y - z)(x + y + z)}$

3.5 b) .... $\boxed{(14x + 3y)(-12x + 3y)}$

3.5 c) .... $\boxed{(x + 1)(y + 1)}$

3.5 d) .... $\boxed{(x - 1)(y - 1)}$

3.5 e) .... $\boxed{(x + y)(x + 1)^2}$

3.5 f) .... $\boxed{\left(a^2 + b^2\right)\left(y - 4x^2\right)\left(y + 4x^2\right)}$

3.6 a) .... $\boxed{(x - 1)(x + 1)\left(x^2 + 1\right)}$

3.6 b) .... $\boxed{-8\left(x^2 + 1\right)(x - 4)(x + 4)}$

3.6 c) .... $\boxed{\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)}$

3.6 d) .... $\boxed{\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right)}$

3.6 e) ...... $\boxed{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\left(p^2 + q^2 + r^2 + s^2\right)}$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

....

3.1 b) On peut écrire : $(x - 1)^3\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être "efficace", il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

....

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ et $(x + 1)\left(x^2 - x + 1\right) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x + 1)^2(x - 1)\left(x^2 - x + 1\right) = [(x + 1)(x - 1)]\left[(x + 1)\left(x^2 - x + 1\right)\right] = \left(x^2 - 1\right)\left(x^3 + 1\right) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

....

3.1 d) On calcule : $(x + 1)^2(x - 1)\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^2 + 2x + 1\right)\left(x^3 - 1\right) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$.

....

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right) = \left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right) = x^5-x^3-x^2+1$.

....

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49 = -(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2 = (6x+7)[-(6x-1)+6x-7] = -6(6x+7)$$

.

....

3.3 b) On calcule $25-(10x+3)^2 = 5^2-(10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

....

3.4 c) La forme canonique est $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2-b^2 = \dots$

....

3.4 d) La forme canonique est $3\left[\left(x+\dfrac{7}{6}\right)^2-\dfrac{37}{36}\right]$.

....

3.4 e) La forme canonique est $2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{233}{16}\right]$.

....

3.4 f) La forme canonique est $-5\left[\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2-\dfrac{4}{25}\right]$.

....

3.5 b) On calcule $x^2+6xy+9y^2-169x^2 = (x+3y)^2-(13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y)$.

....

3.5 e) On calcule $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y = (x+y)(x^2+2x+1) = (x+y)(x+1)^2$.

....

3.6 a) On calcule $x^4-1 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) = (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$.

....

3.6 b) On calcule $\left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right)+64x^4-64 = -8\left(x^2+1\right)\left[9x^2-24-8\left(x^2-1\right)\right] = -8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)$.

....

3.6 c) On calcule $x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = \left(x^2+1\right)-x^2 = \left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$, n'ont pas de solutions réelles.

....

3.6 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 = \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

....

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a) .... $\boxed{5}$

4.1 b) .... $\boxed{\sqrt{3}-1}$

4.1 c) .... $\boxed{-\sqrt{3}+2}$

4.1 d) .... $\boxed{\sqrt{7}-2}$

4.1 e) .... $\boxed{\pi-3}$

4.1 f) .... $\boxed{|3-a|}$

4.2 a) .... $\boxed{20}$

4.2 b) .... $\boxed{9+4\sqrt{5}}$

4.2 c) .... $\boxed{1+\sqrt{3}}$

4.2 d) .... $\boxed{3+\sqrt{2}}$

4.2 e) .... $\boxed{12\sqrt{7}}$

4.2 f) .... $\boxed{12}$

4.2 g) .... $\boxed{9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}}$

4.2 h) .... $\boxed{10}$

4.3 a) .... $\boxed{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}}$

4.3 b) .... $\boxed{3-2\sqrt{2}}$

4.3 c) .... $\boxed{1-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$

4.3 d) .... $\boxed{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2}$

4.3 e) .... $\boxed{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

4.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$

4.3 g) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.3 h) .... $\boxed{50-25\sqrt{3}}$

4.4 .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$

4.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}}$

4.5 b) .... $\boxed{x-\sqrt{x^2-1}}$

4.5 c) .... $\boxed{1+\sqrt{x-1}}$

4.5 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}}$

4.5 e) .... $\boxed{\dfrac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$

4.5 f) .... $\boxed{-4(x-1)^2}$

4.6 a) .... $\boxed{\sqrt{2}}$

4.6 b) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.7 a) .... $\boxed{-11+5\sqrt{5}}$

4.7 b) .... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 c) .... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 d) .... $\boxed{\sqrt{3}}$

4.7 e) .... $\boxed{1+\sqrt{5}}$

4.7 f) .... $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$

4.8 .... $\boxed{1}$

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5^2)} = 5$.

4.1 f) On trouve $|3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a \leqslant 3$ et $a-3$ si $a \geqslant 3$.

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}.$$

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\ &= \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-2} = \frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2} \\ &= 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

4.4 On pose $A := \dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)}{\left(4+2\sqrt{6}\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)} = \frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{6}}{16-24} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

....

4.5 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x+2f(x)} = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1.$$

....

4.5 e) Le calcul donne $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x)+4f''(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}((x-1)^2-1) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

....

4.6 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3+\sqrt{5}-2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}}+3-\sqrt{5} = 6-2\sqrt{9-5} = 6-2\sqrt{4} = 6-4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} \geqslant 0$, donc $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

....

4.7 b) On calcule $3+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}+1 = (\sqrt{2})^2+2\times 1\times\sqrt{2}+1^2 = (1+\sqrt{2})^2$ et on trouve donc

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

....

4.7 e) On calcule : $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = 1+\sqrt{5}$.

....

4.8 Appelons A ce nombre barbare, et écrivons-le $A = \alpha-\beta$ en posant

$$\alpha = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} \text{ et } \beta = \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}.$$

Plutôt que de se lancer dans des choses compliquées, calculons A^3 à l'aide de l'identité remarquable. On a

$$A^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 = \alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$$

ce qui donne

$$A^3 = 6-3A\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}\right)\left(-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}\right)}$$

d'où finalement $A^3 = 6-5A$, ce qui est équivalent à $(A-1)(A^2+A+6) = 0$ en observant que 1 est racine évidente de l'équation $t^3+5t-6 = 0$ d'inconnue t, puis finalement 1 est l'unique racine réelle de cette équation, et donc $A = 1$.

....

Fiche n° 5. Expressions algébriques

Réponses

5.1 a) .... $\boxed{7a^2+12a+7}$

5.1 b) .... $\boxed{a^2-a-1}$

5.1 c) .... $\boxed{4a^2-a-3}$

5.1 d) .... $\boxed{-a^2+1}$

5.2 a) .... $\boxed{8+6\mathrm{i}}$

5.2 b) .... $\boxed{8-6\mathrm{i}}$

5.2 c) .... $\boxed{18-26\mathrm{i}}$

5.2 d) .... $\boxed{-9-46\mathrm{i}}$

5.3 a) .... $\boxed{39-18\mathrm{i}}$

5.3 b) .... $\boxed{2197}$

5.3 c) .... $\boxed{-4+43\mathrm{i}\sqrt{5}}$

5.3 d) .... $\boxed{1}$

5.4 a) .... $\boxed{3}$

5.4 b) .... $\boxed{1}$

5.4 c) .... $\boxed{1}$

5.4 d) .... $\boxed{0}$

5.4 e) .... $\boxed{-1}$

5.4 f) .... $\boxed{31}$

5.5 a) .... $\boxed{a^2+2}$

5.5 b) .... $\boxed{a^3+3a}$

5.5 c) .... $\boxed{a^4+4a^2+2}$

5.6 a) .... $\boxed{a^2-2b}$

5.6 b) .... $\boxed{ab-3c}$

5.6 c) .... $\boxed{a^3-3ab+3c}$

5.6 d) .... $\boxed{ab-c}$

5.6 e) .... $\boxed{ac}$

5.6 f) .... $\boxed{-2ac+b^2}$

5.7 a) .... $\boxed{a^2b-ac-2b^2}$

5.7 b) ... $\boxed{a^4-4a^2b+4ac+2b^2}$

5.7 c) .... $\boxed{0}$

5.7 d) .... $\boxed{1}$

5.7 e) .... $\boxed{a}$

Corrigés

5.1 a) On développe $(a+2)^3 = a^3+6a^2+12a+8$, puis on simplifie sachant que $a^3 = a^2-1$.

5.1 b) De $a^3 = a^2-1$, on déduit $a^6 = a^3(a^2-a) = a^5-a^4$ et donc $a^5-a^6 = a^4$. De plus $a^4 = a(a^2-1)$, *etc.*

5.1 c) On commence par $a^6 = (a^3)^2 = (a^2-1)^2 = a^4-2a^2+1 = -a^2-a$ puis $a^{12} = (-a^2-a)^2 = a^4+2a^3+a^2$.

5.1 d) L'égalité a^3-a^2+1 peut s'écrire $a(a-a^2)=1$ ce qui montre que $a\neq 0$ et $\dfrac{1}{a} = a-a^2$. Alors $\dfrac{1}{a^2} = 1-a$.

5.2 a) On développe : $(3+\mathrm{i})^2 = 9+6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$.

5.2 b) On développe : $(3-\mathrm{i})^2 = 9+6(-\mathrm{i})+(-\mathrm{i})^2 = 9-6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$.

5.2 c) D'après le calcul précédent : $(3-\mathrm{i})^3 = (8-6\mathrm{i})(3-\mathrm{i}) = 24-18\mathrm{i}-8\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2$.

5.2 d) On développe directement : $(3-2\mathrm{i})^3 = 3^3-3\cdot 3^2(2\mathrm{i})^1+3\cdot 3^1(2\mathrm{i})^2-(2\mathrm{i})^3$.

5.3 a) On développe : $24-30\mathrm{i}+12\mathrm{i}-15\mathrm{i}^2$.

5.3 b) En remarquant que $(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}) = 2^2-(3\mathrm{i})^2 = 4+9$, on obtient par associativité 13^3.

5.3 c) On développe : $(-4+\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -4^3+3\cdot 4^2(\mathrm{i}\sqrt{5})-3\cdot 4^1(\mathrm{i}\sqrt{5})^2+(\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -64+48\mathrm{i}\sqrt{5}+60-5\mathrm{i}\sqrt{5}$.

5.3 d) On développe : $(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = -\dfrac{1}{8}+3\cdot i\dfrac{\sqrt{3}}{8}+3\cdot\dfrac{3}{8}-i\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

5.4 a) De $a^5=1$, on déduit $a^7=a^2$ et $a^6=a$ donc tous les termes se simplifient sauf deux : $4-1=3$.

5.4 b) On commence par $a^{1234} = (a^{10})^{123} \times a^4 = a^4$ car $a^{10} = (a^5)^2 = 1$. De même $a^{2341} = a^1$, *etc.* et on obtient donc finalement $a^4 \times a^1 \times a^2 \times a^3 = a^{10} = 1$.

5.4 c) Ceci vaut a^S où $S = \sum_{k=0}^{1234} k = \dfrac{1234 \times (1234+1)}{2}$ est un entier multiple de 5.

5.4 d) Cette somme partielle de suite géométrique vaut $\dfrac{a^5 - 1}{a - 1}$.

5.4 e) Cette somme géométrique vaut $\dfrac{a^{99} - 1}{a - 1} \times a^1 = \dfrac{a^{100} - a}{a - 1} = \dfrac{1 - a}{a - 1} = -1$.

5.4 f) En réordonnant les facteurs et en développant, on obtient :

$$(2 - a^1)(2 - a^4)(2 - a^2)(2 - a^3) = (5 - 2(a + a^4))(5 - 2(a^2 + a^3)) = 25 - 10(a + a^2 + a^3 + a^4) + 4(a + a^4)(a^2 + a^3).$$

Or $a + a^2 + a^3 + a^4 = -1$ et $(a + a^4)(a^2 + a^3) = a^3 + a^6 + a^4 + a^7 = a + a^2 + a^3 + a^4 = -1$ aussi.

5.5 a) On complète le carré : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \dfrac{1}{x}$.

5.5 b) On se ramène au résultat précédent : $x^3 - \dfrac{1}{x^3} = x\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \left(x - \dfrac{1}{x}\right) = a(a^2 + 2) + a$.

5.5 c) De même : $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = x^2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{x^2}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 2 = (a^2 + 2)^2 - 2$.

5.6 a) On développe $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ puis on conclut par soustraction.

5.6 b) On reconnaît $x(xy + zx) + y(yz + xy) + z(zx + yz) = (x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz$.

5.6 c) Le développement $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3\big[x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)\big] + 6xyz$ conduit par soustraction à $a^3 - 3(ab - 3c) - 6c$ d'après l'expression précédente.

5.6 d) *Première solution* : on développe et on obtient une combinaison des expressions précédentes.

Deuxième solution : on reconnaît $(a - z)(a - x)(a - y) = a^3 - (x + y + z)a^2 + (xy + yz + zx)a - xyz$.

5.6 e) En factorisant, on reconnaît $(x + y + z)xyz$.

5.6 f) On se ramène à $(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = (xy + yz + zx)^2 - 2(x^2yz + y^2xz + z^2xy)$.

5.7 a) On cherche $x^2(xy+zx)+y^2(yz+xy)+z^2(zx+yz)$, c'est-à-dire $(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)-x^2yz-y^2zx-z^2xy$.

5.7 b) *Première solution* : on développe $(x+y+z)^4$ puis on conclut par soustraction à l'aide des calculs précédents.

Deuxième solution : on remarque qu'il s'agit de calculer $(x^2)^2 + (y^2)^2 + (z^2)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$, donc qu'il suffit de développer $(a^2 - 2b)^2 - 2(b^2 - 2ac)$.

5.7 c) On réduit au même dénominateur $(x - y)(y - z)(z - x)$ puis on développe le numérateur.

5.7 d) On réduit au même dénominateur $(x-y)(y-z)(z-x)$ puis on factorise le numérateur par $(z-y)$:

$$\begin{aligned} x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x) &= x^2(z-y)+(y^2-z^2)x-yz(y-z) \\ &= (z-y)\big[x^2-(y+z)x+yz\big], \end{aligned}$$

et l'on reconnaît pour le dernier facteur : $x^2-(y+z)x+yz=(x-y)x-(x-y)z=(x-y)(x-z)$.

....

5.7 e) On procède de même :

$$\begin{aligned} x^3(z-y)+y^3(x-z)+z^3(y-x) &= x^3(z-y)+(y^3-z^3)x-yz(y^2-z^2) \\ &= (z-y)\big[x^3-(y^2+yz+z^2)x+yz(y+z)\big] \\ &= (z-y)\big[(x^2-y^2)x-yz(x-y)-z^2(x-y)\big] \\ &= (z-y)(x-y)\big[(x+y)x-yz-z^2\big] \\ &= (z-y)(x-y)\big[(x^2-z^2)+(x-z)y\big] \\ &= (z-y)(x-y)(x-z)[(x+z)+y], \end{aligned}$$

d'où $x+y+z=a$ après simplification par le dénominateur.

....

Fiche n° 6. Équations du second degré

Réponses

6.1 a) $3, 3$

6.1 b) $-1/3, -1/3$

6.1 c) $2, -6$

6.1 d) $2, 3$

6.1 e) 0, donc 5

6.1 f) 0, donc $-3/2$

6.1 g) $\varnothing$

6.1 h) 1 donc -5

6.1 i) 1 donc $8/3$

6.1 j) -1 donc $-19/5$

6.2 a) $6, 7$

6.2 b) $-3, -5$

6.2 c) $-7, -11$

6.2 d) $-3, 11$

6.2 e) a, b

6.2 f) $a - b, a + b$

6.3 a) $2/3$

6.3 b) $-2/7$

6.3 c) $-1/m$

6.3 d) $2m/(m + 3)$

6.4 a) 1 donc $(a - b)/(b - c)$

6.4 b) 1 donc $c(a - b)/(a(b - c))$

6.4 c) m donc $-(m + a + b)$

6.4 d) m donc $m(a - b)/(b - c)$

6.4 e) m donc ab/m

6.4 f) $a + b$ puis $2ab/(a + b)$.

6.5 a) $x^2 - 22x + 117 = 0$

6.5 b) $x^2 - 6x - 187 = 0$

6.5 c) $x^2 - 4x + 1 = 0$

6.5 d) $x^2 - 2mx + 3 = 0$

6.5 e) $2x^2 - (4m + 1)x + (2m^2 + m - 15) = 0$

6.5 f) $m^2x^2 + (m - 2m^2)x + (m^2 - m - 2) = 0$

6.6 a) $m = -3/4$ et $x = 3/4$

6.6 b) $m = -1$ et $x = -2$, ou $m = 7$ et $x = 2/3$

6.6 c) $m = 1$ et $x = -1$ ou $m = -1$ et $x = 1$

6.7 a) $a = 2$ et $b = 3$

6.7 b) $a = -2$ et $b = 1$

6.7 c) $a = -3$ et $b = 5$

6.7 d) $a = 1/2$ et $b = 8$

6.7 e) $a = 1$ et $b = 3\sqrt{7}$

6.8 a) $]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$

6.8 b) $[-3, 5]$

6.8 c) $]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$

6.8 d) $]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[$

Corrigés

6.1 a) C'est une identité remarquable : $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

6.1 c) Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12.

6.1 e) La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

6.1 g) La fonction $x \longmapsto 2x^2 + 3$ est strictement postivie car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

6.2 a) Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

....

6.2 b) On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

....

6.4 e) En réduisant au même dénominateur de part et d'autre l'éqation devient $m(x^2 + ab) = x(m^2 + ab)$ qui est une équation du second degré. Sur la forme initiale de l'équation on lit que m est racine évidente, l'autre est donc ab/m. Peut-être aurait-on pu voir cette racine « évidente » directement ?

....

6.4 f) Le nombre 0 est bien tentant, mais n'est pas racine de l'équation. En revanche $a + b$ convient. L'équation se réécrit $(a+b)(x-a)(x-b) = ab(2x-(a+b))$, d'où une équation du second degré dont le coefficient devant x^2 vaut $a+b$ et le terme constant $2ab(a+b)$, donc la deuxième solution de cette équation est $\dfrac{2ab}{a+b}$.

....

6.5 a) La somme des racines vaut 22, leur produit 117. L'équation cherchée est donc $x^2 - 22x + 117 = 0$.

....

6.6 a) Une équation du second degré admet une racine double si, et seulement si, son discriminant est nul.

Ici, le discriminant vaut $\Delta = (2m+3)^2 - 4m^2 = 3(4m-1)$. Ainsi, l'équation admet une racine double si, et seulement si, m vaut $-3/4$ ce qui donne $x = 3/4$.

....

6.6 b) Ici, le déterminant vaut $\Delta = 4(m^2 - 6m - 7)$, donc une racine évidente est -1 donc l'autre vaut 7. Pour $m = -1$ on trouve $x = -2$ et pour $m = 7$ on trouve $x = 2/3$.

....

6.6 c) Ici le discriminant vaut $\Delta = 4((3m+1)^2 - (m+3)^2) = 32(m^2 - 1)$ donc l'équation admet une racine double si et seulement si m vaut 1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 + 2x + 1 = 0$ et la racine double est -1, ou m vaut -1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 - 2x + 1 = 0$ dont la racine double est 1.

....

6.8 a) Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement négatif sur $]1, \sqrt{2}[$.

....

6.8 b) Les racines sont -5 et 3. Le trinôme est donc strictement négatif sur $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ et strictement positif sur $]-3, 5[$.

....

6.8 c) Ici, les racines sont -1 et $2/3$. Le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, -1[\cup]2/3, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1, 2/3[$.

....

6.8 d) Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit ! Donc le quotient considéré est strictement positif sur $]-\infty, -1/2[\cup]4, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1/2, 4[$ (attention à l'annulation du dénominateur !).

....

Fiche n° 7. Exponentielle et Logarithme

Réponses

7.1 a) .... $\boxed{4\ln 2}$

7.1 b) .... $\boxed{9\ln 2}$

7.1 c) .... $\boxed{-3\ln 2}$

7.1 d) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$

7.1 e) .... $\boxed{3\ln 2}$

7.1 f) .... $\boxed{2\ln 2+2\ln 3}$

7.2 a) .... $\boxed{-\ln 3-2\ln 2}$

7.2 b) .... $\boxed{2\ln 3-2\ln 2}$

7.2 c) .... $\boxed{\ln 3+11\ln 2}$

7.2 d) .... $\boxed{3\ln 5+2\ln 2}$

7.2 e) .... $\boxed{-2\ln 5+4\ln 2}$

7.2 f) .... $\boxed{2\ln 5-2\ln 2}$

7.3 .... $\boxed{-2\ln 2-2\ln 5}$

7.4 a) .... $\boxed{\frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)}$

7.4 b) .... $\boxed{17+12\sqrt{2}}$

7.4 c) .... $\boxed{0}$

7.4 d) .... $\boxed{0}$

7.5 a) .... $\boxed{8}$

7.5 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

7.5 c) .... $\boxed{\frac{1}{3}}$

7.5 d) .... $\boxed{\frac{1}{9}}$

7.5 e) .... $\boxed{-\frac{1}{2}}$

7.5 f) .... $\boxed{\frac{3}{2}}$

7.6 a) .... $\boxed{-2}$

7.6 b) .... $\boxed{\frac{1}{\ln 2}}$

7.6 c) .... $\boxed{-17}$

7.6 d) .... $\boxed{1}$

7.6 e) .... $\boxed{-1}$

7.6 f) .... $\boxed{e}$

7.7 a) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 b) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 c) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 d) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.8 a) .... $\boxed{\mathbb{R}}$

7.8 b) .... $\boxed{\text{ok}}$

7.8 c) .... $\boxed{1}$

7.8 d) .... $\boxed{\text{-1}}$

7.9 a) .... $\boxed{x+\ln 2}$

7.9 b) .... $\boxed{\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}}}$

7.9 c) .... $\boxed{\ln|x-1|}$

7.9 d) .... $\boxed{-\frac{1}{1+x}}$

7.9 e) .... $\boxed{\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}}$

7.10 a) .... $\boxed{x\geqslant\frac{\ln 12+5}{3}}$

7.10 b) .... $\boxed{x\in[0,1]}$

7.10 c) .... $\boxed{x\geqslant\frac{2}{e}}$

7.10 d) .... $\boxed{x\geqslant-\frac{1}{12}}$

7.10 e) .... $\boxed{\varnothing}$

7.10 f) .... $\boxed{\frac{-13-\sqrt{273}}{2}}$

Corrigés

7.1 a) On a $16=4^2=2^4$ donc $\ln 16=4\ln 2$.

....

7.1 c) On a $0{,}125=\frac{1}{8}$ donc $\ln 0,125=-\ln 8=-3\ln 2$.

....

7.1 e) On a $72=8\times 9=2^3\times 3^2$ donc $\ln 72-2\ln 3=(3\ln 2+2\ln 3)-2\ln 3=3\ln 2$.

....

7.2 c) On a $0,875=\frac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln 21+2\ln 14-3\ln(0{,}875)&=(\ln 3+\ln 7)+2(\ln 2+\ln 7)-3(\ln 7-\ln 8)\\&=\ln 3+2\ln 3+3\times 3\ln 2=3\ln 3+11\ln 2.\end{aligned}$$

....

7.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{j=2}^{100} \ln j \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k+1$ d'où finalement $A = \ln 1 - \ln 100 = -2(\ln 2 + \ln 5)$.

7.4 a) On a $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$

On a donc

$$\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \frac{7}{16} \ln((1+\sqrt{2})^2) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{7}{8} \ln(1+\sqrt{2}) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

d'où finalement $\alpha = -\dfrac{7}{8} \ln \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + 4 \ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8} \ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8} \ln(\sqrt{2}-1)$.

7.4 c) On a $\gamma = \ln\Big(\big((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\big)^{20}\Big) = \ln\big(\big((4-3)^{20}\big)\big) = 0$

7.6 b) On a $\mathrm{e}^{-\ln \ln 2} = \mathrm{e}^{(-1)\ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

7.6 e) On a $\ln\Big(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\Big) = \dfrac{1}{2} \ln\big(\exp(-\ln \mathrm{e}^2)\big) = \dfrac{1}{2}(-\ln \mathrm{e}^2)) = \dfrac{1}{2} \times (-2) = -1$.

7.7 a) f_1 est définie sur $]-2021, +2021[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in]-2021, +2021[, \quad f(-x) = \ln \frac{2021-x}{2021+x} = \ln \frac{1}{\frac{2021+x}{2021-x}} = -\ln \frac{2021+x}{2021-x} = -f_1(x).$$

7.7 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) \\ &= \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln \frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \ln \frac{-x^2+(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} = \ln \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = -f_2(x). \end{aligned}$$

7.10 f) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big( ]61, +\infty[\cap]-\infty, -7[\Big)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big( ]-\infty, -7[\cup]61, +\infty[\Big)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $]-\infty, -7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $]-\infty, -7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-13-\sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-13+\sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in]-\infty, -7[$ et $x_2 \notin]-\infty, -7[$.

Fiche n° 8. Trigonométrie

Réponses

8.1 a) .... $\boxed{0}$

8.1 b) .... $\boxed{0}$

8.1 c) .... $\boxed{-1-\sqrt{3}}$

8.1 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

8.2 a) .... $\boxed{0}$

8.2 b) .... $\boxed{-\sin x}$

8.2 c) .... $\boxed{2\cos x}$

8.2 d) .... $\boxed{-2\cos x}$

8.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

8.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

8.3 c) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

8.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}$

8.4 a) .... $\boxed{-\sin x}$

8.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{\cos x}}$

8.4 c) .... $\boxed{0}$

8.4 d) .... $\boxed{4\cos^3 x - 3\cos x}$

8.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

8.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

8.6 a) .... $\boxed{\tan x}$

8.6 b) .... $\boxed{2}$

8.6 c) .... $\boxed{8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right\}}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{-2\pi}{3}, \dfrac{-\pi}{3}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\dfrac{7\pi}{4}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 g) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}\right\}}$

8.7 g) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{11\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}\right\}}$

8.7 g) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{11\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 h) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}}$

8.7 h) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

8.7 h) .... $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.7 i) .... $\left\{\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{13\pi}{7}\right\}$

8.7 i) .... $\left\{-\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{\pi}{7}\right\}$

8.7 i) ...... $\left\{\dfrac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.7 j) .... $\left\{\dfrac{5\pi}{14}, \dfrac{9\pi}{14}\right\}$

8.7 j) .... $\left\{\dfrac{5\pi}{14}, \dfrac{9\pi}{14}\right\}$

8.7 j) ...... $\left\{\dfrac{5\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{9\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.8 a) .... $\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

8.8 a) .... $\left[-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

8.8 b) .... $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$

8.8 b) .... $\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$

8.8 c) .... $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$

8.8 c) .... $\left[-\pi, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$

8.8 d) .... $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$

8.8 d) .... $\left[-\pi, -\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$

8.8 e) .... $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

8.8 e) .... $\left[-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

8.8 f) ..... $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$

8.8 f) .... $\left[-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

8.8 g) .... $\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

8.8 g) .... $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

8.8 h) .... $\left[0, \dfrac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$

8.8 h) .... $\left[-\pi, -\dfrac{5\pi}{8}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{8}, \pi\right]$

Corrigés

8.3 b) On peut utiliser $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ puis les formules d'addition.

8.4 b) On a

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x\cos x - \cos 2x \sin x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin(2x-x)}{\sin x\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

On peut aussi faire cette simplification à l'aide des formules de duplication :

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{2\sin x\cos x}{\sin x} - \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

8.4 d) On calcule

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x\sin^2 x\\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

8.5 a) On a $\cos\dfrac{\pi}{4} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{8} - 1$ donc $\cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$. De plus, $\cos\dfrac{\pi}{8} \geqslant 0$ donc $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

8.5 b) On a $\sin^2\dfrac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8} \geqslant 0$ donc $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

8.6 a) On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ donc $\dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \dfrac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \tan x$.

8.6 b) On a $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \dfrac{\sin(3x-x)}{\sin x \cos x} = \dfrac{\sin(2x)}{\sin x} = \dfrac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2$.

8.6 c) On a $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

8.7 e) Cela revient à résoudre « $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ».

8.7 g) Si on résout avec $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x \in [0, 4\pi]$.

Or, dans $[0, 4\pi]$, on a $\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $t \in \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{13\pi}{6}, \dfrac{23\pi}{6}\right\}$ et donc pour $x \in \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}\right\}$.

8.7 h) $\sin x$ est solution de l'équation de degré 2 : $2t^2 + t - 1 = 0$ dont les solutions sont $t = -1$ et $t = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, les x solutions sont les x tels que $\sin x = -1$ ou $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

8.7 j) On a $\cos\dfrac{\pi}{7} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{7}\right) = \sin\dfrac{5\pi}{14}$. Finalement, on résout $\sin x = \sin\dfrac{5\pi}{14}$.

8.8 d) Cela revient à résoudre $-\dfrac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

8.8 f) On résout « $\tan x \geqslant 1$ ou $\tan x \leqslant -1$ ».

8.8 g) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = x - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$ et donc $x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

8.8 h) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 4\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 4\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{2}, \dfrac{15\pi}{4}\right]$ puis $x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$.

Fiche n° 9. Dérivation

Réponses

9.1 a) $\boxed{6x^2+2x-11}$

9.1 b) $\boxed{5x^4-6x^2+4x-15}$

9.1 c) $\boxed{(2x^2-2x+10)\exp(2x)}$

9.1 d) $\boxed{(6x-1)\ln(x-2)+\dfrac{3x^2-x}{x-2}}$

9.2 a) $\boxed{5(x^2-5x)^4(2x-5)}$

9.2 b) $\boxed{4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)}$

9.2 c) $\boxed{8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4}$

9.2 d) $\boxed{-3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))}$

9.3 a) $\boxed{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

9.3 b) $\boxed{\dfrac{1}{x\ln(x)}}$

9.3 c) $\boxed{(-2x^2+3x-1)\exp(x^2+x)}$

9.3 d) $\boxed{6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))}$

9.4 a) $\boxed{\dfrac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)}$

9.4 b) $\boxed{\dfrac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)}$

9.4 c) $\boxed{\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}}$

9.4 d) $\boxed{\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}$

9.5 a) $\boxed{\dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}}$

9.5 b) $\boxed{\dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}}$

9.5 c) $\boxed{-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}}$

9.5 d) $\boxed{\dfrac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2}}$

9.6 a) $\boxed{2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

9.6 b) $\boxed{\dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}}$

9.6 c) $\boxed{\dfrac{1}{1-x^2}}$

9.6 d) $\boxed{\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}}$

9.7 a) $\boxed{\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}}$

9.7 b) $\boxed{\dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}$

9.7 c) $\boxed{\dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}}$

9.7 d) $\boxed{\dfrac{x^2}{(x+1)^2}}$

9.7 e) $\boxed{\dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}}$

Corrigés

9.1 a) On calcule : $f'(x)=(2x+3)(2x-5)+(x^2+3x+2)\times 2=6x^2+2x-11$.

9.1 b) On calcule : $f'(x)=(3x^2+3)(x^2-5)+(x^3+3x+2)\times 2x=5x^4-6x^2+4x-15$.

9.1 c) On calcule : $f'(x)=(2x-2)\exp(2x)+(x^2-2x+6)\times 2\exp(2x)=(2x^2-2x+10)\exp(2x)$.

9.1 d) On calcule : $f'(x)=(6x-1)\ln(x-2)+(3x^2-x)\times\dfrac{1}{x-2}=(6x-1)\ln(x-2)+\dfrac{3x^2-x}{x-2}$.

9.2 a) On calcule : $f'(x)=5(x^2-5x)^4(2x-5)$.

9.2 b) On calcule : $f'(x) = 2(2x^3+4x-1)(6x^2+4) = 4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)$.

9.2 c) On calcule :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2(\sin(x)+2\cos(x))(\cos(x)-2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x)-2\sin^2(x)+2\cos^2(x)-4\cos(x)\sin(x)\\ &= -6\cos(x)\sin(x)-4\sin^2(x)+4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x)-4(1-\cos^2(x))+4\cos^2(x)\\ &= 8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4.\end{aligned}$$

9.2 d) On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x)-\sin(x))^2(-3\sin(x)-\cos(x)) = -3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))$.
En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x)-78\cos^3(x)-9\sin(x)+51\cos(x)$.

9.3 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln\circ u$.

9.3 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

9.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned}f'(x) &= (-1)\exp(x^2+x)+(2-x)\exp(x^2+x)\times(2x+1) = (-1+(2-x)(2x+1))\exp(x^2+x)\\ &= (-1+4x+2-2x^2-x)\exp(x^2+x) = (-2x^2+3x-1)\exp(x^2+x).\end{aligned}$$

9.3 d) On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3\times2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

9.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big)\times\frac{4x(x^2+1)-(2x^2-1)\times2x}{(x^2+1)^2} = \cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big)\frac{4x^3+4x-4x^3+2x}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\Big(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\Big).\end{aligned}$$

9.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big)\times\frac{2(x^2+4)-(2x+1)\times2x}{(x^2+4)^2} = -\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big)\times\frac{2x^2+8-4x^2-2x}{(x^2+4)^2}\\ &= \frac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\Big(\frac{2x+1}{x^2+4}\Big).\end{aligned}$$

9.4 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cos(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

9.4 d) On calcule : $f'(x) = \cos(\sqrt{x})\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

9.5 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2\cos(x)+4x\sin(x)-6x\cos(x)+6\sin(x)+6x+9}{(2\sin(x)+3)^2}.$$

9.5 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2)-\sqrt{x}\times3}{(3x+2)^2} = \dfrac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x+2)^2} = \dfrac{3x+2-6x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

9.5 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x+1)\times(x^2+1)-\cos(2x+1)\times2x}{(x^2+1)^2} = -2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

9.5 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - (2x^2+3x)\dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

9.6 a) On calcule : $f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \times \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

9.6 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2} - x\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)}{\sqrt{9-x^2}^2} = \dfrac{\sqrt{9-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{\frac{9-x^2+x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

9.6 c) On a trois fonctions composées à la suite : $f = \ln(\sqrt{u})$). Donc on a, en appliquant deux fois la formule de dérivée d'une fonction composée : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u-x)}} \times u'(x) \times \dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$.

On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \times \frac{1(x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \\ &= \frac{1}{2 \times \dfrac{x+1}{x-1}} \times \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

9.6 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\cos(x)\times x - \sin(x)\times 1}{x^2} \times \dfrac{x}{\sin(x)} = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)}$.

9.7 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-(-1)}{(3-x)^2} + \dfrac{-1}{(2+x)^2} = \dfrac{(2+x)^2 - (3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2} = \dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

9.7 b) On calcule : $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{2x^2+2x-1}{x+1}$.

Pour le trinôme $2x^2+2x-1$, on calcule $\Delta = 4 - 4\times 2\times(-1) = 12$. On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2\times 2} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x) = \dfrac{2(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{x+1} = \dfrac{2}{x+1}\left(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

9.7 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+2} - \dfrac{1\times(x-1) - (x+2)\times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

On cherche les racines du trinôme x^2+x-2 dont le discriminant est $\Delta = 1+8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2+2x+5$ dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4\times 2\times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

9.7 d) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\times(x+1) - x\times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1 + (x+1)^2 - 2(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1 + x^2 + 2x + 1 - 2x - 2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

9.7 e) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1-\ln(x)) - (1+\ln(x))\frac{-1}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{2}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$.

Fiche n° 16. Nombres complexes

Réponses

16.1 a) .... $\boxed{4+32\mathrm{i}}$

16.1 b) .... $\boxed{13-\mathrm{i}}$

16.1 c) .... $\boxed{7-24\mathrm{i}}$

16.1 d) .... $\boxed{5}$

16.1 e) .. $\boxed{-119+120\mathrm{i}}$

16.1 f) ..... $\boxed{\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}}$

16.1 g) ..... $\boxed{\dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}}$

16.1 h) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$

16.2 a) .... $\boxed{12}$

16.2 b) .... $\boxed{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$

16.2 c) .... $\boxed{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

16.2 d) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

16.2 e) .... $\boxed{2e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}}$

16.2 f) .... $\boxed{5\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}$

16.2 g) ...... $\boxed{10\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}}$

16.2 h) $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

16.3 a) .... $\boxed{1}$

16.3 b) ... $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

16.3 c) .. $\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

Corrigés

16.1 a) On développe : $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i}) = 10+2\mathrm{i}+30\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2 = 10+32\mathrm{i}-6 = 4+32\mathrm{i}$.

....

16.1 b) On développe : $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 12+3\mathrm{i}-4\mathrm{i}-\mathrm{i}^2 = 12-\mathrm{i}+1 = 13-\mathrm{i}$.

....

16.1 c) On développe : $(4-3\mathrm{i})^2 = 4^2-2\times4\times3\mathrm{i}+(3\mathrm{i})^2 = 16-24\mathrm{i}-9 = 7-24\mathrm{i}$

....

16.1 d) On développe : $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2-(2\mathrm{i})^2 = 1+4 = 5$.

Ou bien : en posant $z = 1-2\mathrm{i}$, on reconnaît la quantité $z\bar{z}$, c'est-à-dire $|z|^2$. Ainsi, $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2+2^2 = 5$.

....

16.1 e) On développe :

$(2-3\mathrm{i})^4 = \left((2-3\mathrm{i})^2\right)^2 = (4-2\times2\times3\mathrm{i}-9)^2 = (-5-12\mathrm{i})^2 = (5+12\mathrm{i})^2 = 5^2+2\times5\times12\mathrm{i}-12^2 = -119+120\mathrm{i}$.
Ou bien : avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(2-3\mathrm{i})^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}2^k(-3\mathrm{i})^{4-k}\\ &= (-3\mathrm{i})^4+4\times2\times(-3\mathrm{i})^3+6\times2^2\times(-3\mathrm{i})^2+4\times2^3\times(-3\mathrm{i})+2^4\\ &= 81+216i-216-96\mathrm{i}+16 = -119+120\mathrm{i}.\end{aligned}$$

....

16.1 f) On utilise l'expression conjuguée : $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{3^2+1^2} = \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$

....

16.1 g) On utilise l'expression conjuguée et on développe :

$\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}} = \dfrac{(2-3\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})} = \dfrac{10-4\mathrm{i}-15\mathrm{i}-6}{5^2+2^2} = \dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}$.

....

16.1 h) On utilise la définition de l'écriture exponentielle et la trigonométrie :

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

....

16.2 a) On a $|12| = 12$ et $\arg(12) = 0$, donc la réponse est 12 (ou $12\mathrm{e}^{0\mathrm{i}}$).

....

16.2 b) On a $|-8| = 8$ et $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

....

16.2 c) On a $|\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{3}$ et $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

16.2 d) On a $|-2\mathrm{i}| = 2$ et $-\mathrm{i} = \overline{\mathrm{i}} = \overline{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$.

16.2 e) On écrit que $-2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et on utilise les propriétés de l'exponentielle :

$-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$.

16.2 f) On calcule $|5-5\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{2\times 5^2} = 5\sqrt{2}$ et on écrit

$5-5\mathrm{i} = 5\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

16.2 g) On calcule $|-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{25+75} = 10$ puis on écrit

$-5+5\mathrm{i}\sqrt{3} = 10\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

16.2 h) On écrit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right| = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (car $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \geqslant 0$ et $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| = 1$. Et $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}) = \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

On en déduit que l'écriture exponentielle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ est $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

16.3 a) On remarque que le dénominateur de z est le conjugué du numérateur. Ainsi, $|z| = 1$.

16.3 b) De plus, en multipliant par le conjugué, on obtient

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})^2}{(1+\sqrt{2}-\mathrm{i})(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})\mathrm{i} - 1}{(1+\sqrt{2})^2+1} \\ &= \frac{1+2\sqrt{2}+2+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}-1}{1+2\sqrt{2}+2+1} = \frac{2+2\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}}{4+2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{2})(1+\mathrm{i})}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}, \end{aligned}$$

16.3 c) Enfin, $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $z^{2021} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{2021} = \mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi}$.

Comme $2021 = 4\times 505 + 1$, on a $\mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi + \frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Fiche n° 17. Trigonométrie et nombres complexes

Réponses

17.1 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\cos(3x)+\dfrac{3}{4}\cos(x)}$

17.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{4}\cos(4x)+\dfrac{1}{2}\cos(2x)-\dfrac{1}{4}}$

17.1 c) ... $\boxed{-\dfrac{1}{8}\cos(6x)+\dfrac{1}{4}\cos(4x)-\dfrac{3}{8}\cos(2x)+\dfrac{1}{4}}$

17.1 d) ... $\boxed{-\dfrac{\sin(9x)}{8}+\dfrac{3\sin(5x)}{8}-\dfrac{\sin(3x)}{8}-\dfrac{3\sin(x)}{8}}$

17.1 e) .... $\boxed{\dfrac{\cos(9x)}{8}+\dfrac{3\cos(5x)}{8}+\dfrac{\cos(3x)}{8}+\dfrac{3\cos(x)}{8}}$

17.1 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{4}\sin(11x)+\dfrac{1}{4}\sin(5x)+\dfrac{1}{2}\sin(3x)}$

17.2 a) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}$

17.2 b) .... $\boxed{\left(-2\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}$

17.2 c) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}}$

17.2 d) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}}$

17.2 e) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}}$

17.2 f) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}}$

17.2 g) .... $\boxed{\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{24}}}$

17.2 h) .... $\boxed{2^{27}\cos^{27}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

17.3 a) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}$

17.3 b) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}}$

17.4 a) .... $\boxed{4\cos^3(x)-3\cos(x)}$

17.4 b) .... $\boxed{4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)}$

17.5 a) .... $\boxed{2\cos(2x)\cos(x)}$

17.5 b) .... $\boxed{2\cos(4x)\sin(x)}$

17.5 c) .... $\boxed{2\sin(x)\sin(2x)}$

17.5 d) .... $\boxed{2\sin(4x)\cos(x)}$

17.6 a) .... $\boxed{\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$

17.6 b) .... $\boxed{\dfrac{\sin(8x)}{2\sin(x)}}$

17.6 c) .... $\boxed{0}$

17.7 a) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}}$

17.7 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi}-2)}$

Corrigés

17.1 a) On calcule :

$$\cos^3(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right)=\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right)+\frac{3}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos x.$$

17.1 b) On calcule :

$$\cos(2x)\sin^2(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2=-\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)$$
$$=-\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}-2\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)+2\right)=-\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}.$$

17.1 d) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x)\sin^3(2x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{3ix}+\mathrm{e}^{-3ix}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{2ix}-\mathrm{e}^{-2ix}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = -\frac{1}{16\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3ix}+\mathrm{e}^{-3ix}\right)\left(\mathrm{e}^{6ix}-3\mathrm{e}^{2ix}+3\mathrm{e}^{-2ix}-\mathrm{e}^{-6ix}\right)\\ &= -\frac{1}{16\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{9ix}-\mathrm{e}^{-9ix}-3(\mathrm{e}^{5ix}-\mathrm{e}^{-5ix})+\mathrm{e}^{3ix}-\mathrm{e}^{-3ix}+3(\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix})\right)\\ &= -\frac{1}{8}\sin(9x)+\frac{3}{8}\sin(5x)-\frac{1}{8}\sin(3x)-\frac{3}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

....

17.2 a) $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$

....

17.2 b) $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}+\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}_{<0}\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}.$

....

17.2 c) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}-1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\left(-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{-\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}.$

....

17.2 d) $1+\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$

....

17.2 e) $-1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = \underbrace{-2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{<0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\pi} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}.$

....

17.2 f) $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}\left(-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}.$

....

17.2 g) On fait le quotient de a) et f).

....

17.2 h) $\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{27} = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{27} = 2^{27}\cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$

....

17.3 a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}.$

....

17.3 b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{i}\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}.$

....

17.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{3ix}) = \mathrm{Re}\left((\mathrm{e}^{ix})^3\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^3\right)\\ &= \mathrm{Re}(\cos^3(x)+3\mathrm{i}\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-\mathrm{i}\sin^3(x))\\ &= \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x)-3\cos(x)(1-\cos^2(x))\\ &= 4\cos^3(x)-3\cos(x).\end{aligned}$$

....

17.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\sin(4x) &= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{4ix}) = \mathrm{Im}\left((\mathrm{e}^{ix})^4\right) = \mathrm{Im}\left((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^4\right)\\ &= \mathrm{Im}(\cos^4(x)+4\mathrm{i}\cos^3(x)\sin(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)-4\mathrm{i}\cos(x)\sin^3(x)+\sin^4(x))\\ &= 4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x).\end{aligned}$$

....

17.5 a) $\cos(x)+\cos(3x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{3ix}) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+3x}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)}+\mathrm{e}^{ix})\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2ix}2\cos(x)\right) = 2\cos(2x)\cos(x).$

....

17.5 b) $\sin(5x) - \sin(3x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\big) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} 2\mathrm{i}\sin(x)\big) = 2\cos(4x)\sin(x)$.

17.5 c) $\cos(x) - \cos(3x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) = \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+3x}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\Big) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}(-2\mathrm{i})\sin(x)\big) = 2\sin(x)\sin(2x)$.

17.5 d) $\sin(3x) + \sin(5x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\big) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} 2\cos(x)\big) = 2\sin(4x)\cos(x)$.

17.6 a) Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 0. Sinon, $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$
$= \mathrm{Im}\big(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2 + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3\big)$. Or, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 1$ donc $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2 + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3 = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$.
On utilise maintenant l'astuce de l'arc moitié. On obtient,

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\frac{-2\mathrm{i}\sin(2x)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3x}{2}}\frac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

17.6 b) Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 4.
Si x est de la forme $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, la somme vaut -4.
Sinon, on calcule :

$$\begin{aligned}\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x) &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{7\mathrm{i}x}) \\ &= \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(1 + (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}) + (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^2 + (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^3\big)\Big).\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \neq 1$ donc

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(1 + (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}) + (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^2 + (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^3\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1 - (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^4}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1 - (\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x})}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\frac{-2\mathrm{i}\sin(4x)}{-2\mathrm{i}\sin(x)} = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}\frac{\sin(4x)}{\sin(x)}.$$

Finalement, on a

$$\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x) = \frac{\cos(4x)\sin(4x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(8x)}{2\sin(x)}.$$

17.6 c) On calcule :

$$\cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x + \frac{2\pi}{3})} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x + \frac{4\pi}{3})}\Big) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\underbrace{(1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2)}_{=0}\right) = 0.$$

17.7 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \mathrm{e}^x \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \mathrm{Im}(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}}\right]_0^\pi\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi+\mathrm{i}\pi} - 1}{1+\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-\mathrm{e}^\pi - 1}{1+\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(-\mathrm{e}^\pi - 1)(1-\mathrm{i})}{2}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}.\end{aligned}$$
