Bien commencer les mathématiques en PTSI

1 Introduction

Tout d'abord, soyez les bienvenus en PTSI !
Afin que vous soyez, à la rentrée, dans les meilleures dispositions pour recevoir un enseignement ambitieux et conceptuel, nous avons mis au point cet ensemble de prérequis : tout ce qui y figure doit être maîtrisé le jour de la rentrée, les parties assorties de symbole ♡ doivent être connues **par cœur**. Ne tolérez **aucune hésitation**. Nous corrigerons pendant la semaine de rentrée certains des exercices qui jalonnent ce document, et sur lequel vous aurez pendant ces grandes vacances mené une réflexion en autonomie. Si vous ne trouvez pas de solution à ces exercices, reprenez-les plus tard, ne vous découragez pas.
Nous vous conseillons de travailler sur ce document bien en amont de la rentrée, au plus tard au début du mois d'août, jusqu'à son assimilation complète.

hotline : $\mathfrak{Pt}_1$: `herve.carrieu@neuf.fr` $\mathfrak{Pt}^2$: `olivier.vanadia@icloud.com`

Nous attendons de vous des raisonnements rigoureux et précis, vous devez être capable de justifier c'est-à-dire d'expliquer tout ce que vous écrivez, l'attitude à adopter est celle du doute et du recul critique permanents, votre concentration doit être sans faille. Les différentes phrases mathématiques doivent être reliées par des liens logiques (implication ou équivalence) éprouvés mentalement.

Pour faciliter votre apprentissage du cours, notez ces quelques conseils. Vous allez devoir mémoriser (comme un poème) des définitions, celles-ci permettent d'introduire de nouveaux objets mathématiques. Il est certain que si vous ne « connaissez » pas, autrement qu'intuitivement, l'objet en question, vous aurez du mal à le manipuler. A mémoriser également des lemmes, propositions, théorèmes et corollaires (comme un poème là encore), nous vous expliquerons en cours d'année les différences entre ces énoncés mais dès à présent, nous vous invitons à décortiquer leur structure. Systématiquement, observez une partie hypothèses d'abord (ce qu'on se donne, ce dont on part), puis conclusion (ce qu'on peut déduire des hypothèses).

Les exercices, problèmes ou chapitres de cours présentent eux aussi une structure interne. Pour un exercice ou un problème, les questions dépendent a priori les unes des autres, il faut donc **garder en mémoire** tous les résultats des questions antérieures avant d'aborder une nouvelle question. Lorsque vous répondez à une question, vous créez une « brique » de raisonnement, l'agencement de ces briques interdépendantes produit un édifice dont la ou les dernières pierres posées constituent la réponse au problème donné au départ. Les énoncés sont plus ou moins guidant, vous devrez parfois faire preuve d'autonomie voire d'ingéniosité.

Le point d'achoppement de bon nombre d'étudiants est de méconnaître ce lien d'interdépendance entre questions, ou a minima de n'avoir qu'un vague souvenir des questions précédemment traitées, comme si les briques de construction une fois produites, se perdaient, s'enfonçaient dans un « sable oublieux »...

Maintenant et pour clore cette introduction, voici un exemple de rédaction imprécise et conduisant à un ensemble de solution inexact. Certains d'entre vous se reconnaîtront peut-être : il est encore temps de changer d'attitude et d'habitudes mathématiques en s'inspirant des corrigés qui suivent.

✍ **Exercice 1** Résoudre l'équation $\sqrt{2-x}=x \quad (E)$.

(Rédaction type d'un apprenti mathématicien peu regardant [1])

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{2-x}=x\\ 2-x=x^2\\ x^2+x-2=0\\ \Delta=b^2-4ac=1+8=9\\ x_1=\dfrac{-1-\sqrt{9}}{2}=-2\quad x_2=\dfrac{-1+\sqrt{9}}{2}=1\\ S=\{1,-2\}\end{array}}$$

Nos commentaires :

- Où résout-on cette équation ? Autrement dit dans quel ensemble rechercher l'inconnue implicite x ? (Observer au passage la conjugaison du verbe résoudre)
- Quels sont les liens logiques entre ces lignes ?
- Que signifie Δ, qui n'est qu'une lettre grecque ? Et a, b et c qui n'ont été définis nulle part ? De même qui a gravé dans le marbre que x_1 et x_2 étaient les solutions de l'équation du second degré écrite en troisième ligne ? Et que signifie cette lettre S ? En mathématiques, toute nouvelle lettre ou ensemble de signe doivent systématiquement être présentés au lecteur ! Evidemment, il existe un grand nombre de notations dites *consacrées* que l'on n'a pas à redéfinir systématiquement, par exemple les notations π ou e (lire *nombre de Neper*) désignent deux réels dont les premières propriétés doivent être connues de vous.
- Mais le problème le plus alarmant de cette résolution est qu'elle est fausse ! La fonction qui élève au carré n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$ (elle l'est sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$ en revanche), donc si vous ne contrôlez pas le signe des expressions, vous perdez l'équivalence en élevant au carré, on n'a seulement une implication : « si deux réels sont égaux, alors leur carrée le sont aussi », la réciproque est fausse, par exemple, $(-2)^2=2^2$ mais $-2\neq 2$. En revanche, on a l'équivalence suivante : « Deux réels de même signe sont égaux si et seulement si leur carré le sont aussi ».
- Dans une rédaction, lorsqu'on perd l'équivalence entre phrases mathématiques, on est ensuite dans l'obligation d'étudier la réciproque. On dit qu'on fait un raisonnement par *analyse-synthèse*. Evidemment, pour ne pas avoir à étudier de réciproque, on préfèrera systématiquement raisonner, lorsque c'est possible, par équivalence.
- Dernier défaut moins grave : le résultat obtenu n'est pas encadré, ce qui est tout de même préjudiciable si on se souvient de l'interdépendance entre questions, ce résultat peut servir plus loin, il faut veiller à ce qu'il soit visuellement accessible.

Et maintenant deux corrections, l'une par Analyse-Synthèse, l'autre par équivalence (possible dans ce cas) :

Correction 1

Analyse : C'est l'étape où on suppose l'existence de solution et on trouve la forme qu'elles doivent nécessairement avoir, on parle à ce stade de *solutions éventuelles*.
On résout l'équation (E) où elle a un sens, soit sur l'intervalle $]-\infty,2]$:

$$\begin{array}{rcl}(E) & \Longrightarrow & 2-x=x^2\\ & \Longrightarrow & x^2+x-2=0\end{array}$$

Cette dernière équation admet le réel 1 pour solution évidente, on factorise l'expression x^2+x-2 en $(x-1)(ax+b)$, où a et b sont des réels inconnus, facilement déterminés en développant, on poursuit alors :

$$\begin{array}{rcl}x^2+x-2=0 & \Longrightarrow & (x-1)(x+2)=0\\ & \Longrightarrow & x=1 \text{ ou } x=-2\end{array}$$

1. a.k.a. le Pt $^{2}_{1}$ moyen

Les solutions éventuelles sont 1 et -2, elles sont bien dans $]-\infty, 2]$

Synthèse : C'est l'étape connue sous le nom de *réciproque*, on prend les solutions éventuelles, et on vérifie si elles répondent effectivement au problème posé au départ.
• $\sqrt{2-1} = 1$ est vrai, donc 1 est solution effective de (E).
• $\sqrt{2-(-2))} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$, donc -2 n'est pas solution de (E).

Conclusion : $\boxed{(E) \text{ admet le réel 1 comme unique solution.}}$

Correction 2

On remarque d'emblée que les réels strictement négatifs ne peuvent pas être solution, l'expression $\sqrt{2-x}$ étant positive. On résout donc dans l'intervalle $[0, 2]$, les membres de droite comme de gauche de l'égalité sont définis et tous les deux positifs, on conserve l'équivalence :

$$\begin{array}{rcl} (E) & \Leftrightarrow & 2-x = x^2 \\ & \Leftrightarrow & x^2 + x - 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & (x-1)(x+2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & x = 1 \end{array}$$

car -2 est négatif. On termine par la même conclusion que précédemment, remarquez que celle-ci a été encadrée, vous la voyez vite et bien, non ?

2 Des symboles et des notations

Les symboles mathématiques ne sont pas des abréviations de mots français, on ne peut les utiliser qu'au sein d'énoncés mathématiques où seuls de tels symboles interviennent, vous devez être capables de traduire en une succession de mots français une succession de symbole mathématiques et réciproquement.

Voici une liste de quelques symboles couramment utilisés et leur traduction entre guillemets.

- $\forall$: « quelque soit » ou « pour tout »
- $\exists$: « il existe au moins un »
- / ou bien une virgule (,) ou encore un point-virgule (;) : « tel que »
- $\exists!$: « il existe un unique »
- $\Longrightarrow$: « implique » ou « donc »
- $\Longleftrightarrow$: « équivaut à » ou « revient à » ou « si et seulement si »
- $x \in E$: « l'élément x appartient à l'ensemble E c'est-à-dire x est un élément de l'ensemble E »
- $E \subset F$: « l'ensemble E est inclus dans l'ensemble F c'est-à-dire tout élément de E est un élément de F »
- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2, \ldots\}$
- $\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des décimaux c'est-à-dire des rapports de deux entiers relatifs dont le dénominateur est une puissance de 10 :

$$\heartsuit \quad \boxed{\mathbb{D} = \left\{\frac{m}{10^p} \ / \ m \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N}\right\}}$$

- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des rationnels c'est-à-dire des rapports de deux entiers relatifs :

$$\heartsuit \quad \boxed{\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \ / \ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*\right\}}$$

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des réels qui ne sont pas rationnels et qu'on appelle *irrationnels*. Vous en connaissez déjà au moins deux : $\sqrt{2}$ et π.
- $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des complexes : connu par ceux d'entre-vous qui ont suivi l'option « math-expertes ».

On rappelle la succession d'inclusion d'ensembles suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Exemple 1 La phrase mathématiques : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$, signifie que la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 On sait qu'un entier est pair si et seulement s'il est le double d'un autre entier, on peut écrire cette idée ainsi, en notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers pairs :

$$n \in \mathcal{P} \ \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2k.$$

Exemple 3 Pour dire que l'équation d'inconnue x réelle : $\sin x = 0$ admet tous les multiples entiers de π comme solution, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ [\sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi]$$

3 Des formules de calcul algébrique

• Si a, b et c sont des réels, on se doit de savoir les égalités suivantes, dans les deux sens de lecture du signe d'égalité :

$$\boxed{\begin{array}{l} \heartsuit\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \heartsuit\ (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ \heartsuit\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \heartsuit\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ \heartsuit\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{array}}$$

• Deux cas particuliers du précédent fréquents avec $b = 1$ ou $b = -1$:

$$\boxed{\heartsuit\ a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1) \quad \text{et} \quad \heartsuit\ a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1).}$$

• *Quantité conjuguée* :

$$\boxed{\heartsuit\ \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}}$$

• Pour tout réel x : $\boxed{\heartsuit\ (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab}$.

Proposition 1

Le couple de réels ou de complexes (a, b) est solution du système :

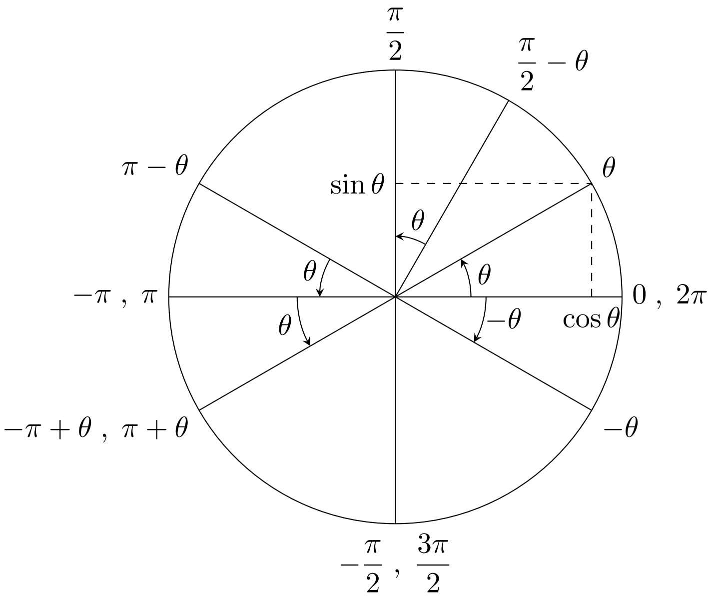
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & s \\ ab & = & p \end{array} \right.$$

si et seulement si a et b sont les racines du trinôme $X^2 - sX + p$ soit, si et seulement si a et b sont les solutions, réelles ou complexes, éventuellement doubles, de l'équation : $x^2 - sx + p = 0$ d'inconnue x.

✍ **Exercice 2** Démontrer la Proposition 1, ainsi que les 9 égalités qui la précèdent.

4 Un peu de trigonométrie

4.1 Cercle trigonométrique



Ce cercle se nomme également *cercle unité*, et comme son nom l'indique son rayon vaut 1. Tout angle présente plusieurs mesures qui diffèrent entre elles d'un multiple entier de 2π (mesure d'un tour complet), on dit que ces mesures sont *égales* ou *congrues modulo* 2π et on note, par exemple $-\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2} \quad [2\pi]$, pour ne pas surcharger le dessin, des angles congrus modulo 2π ont simplement été séparés par une virgule.

4.2 Valeurs remarquables

On rappelle que si θ est un réel dont le cosinus est non nul, autrement dit qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où k est dans $\mathbb{Z}$, on définit la *tangente* de cet angle θ comme étant le rapport de son sinus par son cosinus.

Notation 1 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

On travaillera également (ce sera moins fréquent) avec la *cotangente* d'un angle θ dont le sinus est non nul, autrement dit qui n'est pas de la forme $k\pi$ où k est dans $\mathbb{Z}$, définie comme étant le rapport de son cosinus par son sinus.

Notation 2 $\operatorname{cotan}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

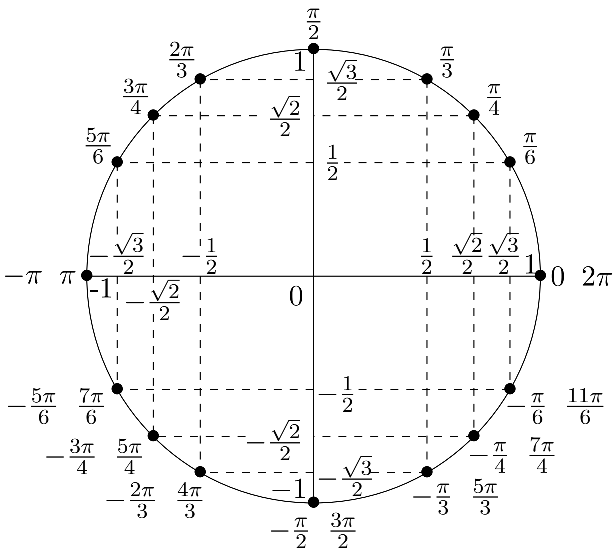
Proposition 2

Si θ est un réel dont la tangente et la cotangente sont simultanément définies et non nulles, autrement dit si θ n'est pas de la forme $k\frac{\pi}{2}$ où k est dans $\mathbb{Z}$ (multiples entiers de $\frac{\pi}{2}$), alors on a :

$$\tan\theta = \frac{1}{\operatorname{cotan}\theta}.$$

Remarque 1 On peut, par abus !, écrire $\cos\theta$ sans parenthèse ou $\cos(\theta)$ avec parenthèses, en revanche dans tout autre cas d'expression à laquelle on appliquerait la fonction cosinus, les parenthèses sont obligatoires afin de hiérarchiser et structurer l'expression. On doit écrire : $\cos(2\theta)$ si on souhaite le cosinus du double de l'angle θ ou encore avec des parenthèses de tailles variables si besoin : $\cos\big(\theta(\theta+1)\big)$.
Ceci est valable pour les autres fonctions circulaires sin, tan et cotan, mais aussi plus généralement pour toute autre fonction.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini



4.3 Formules d'additions et conséquences

Les formules impliquant les tangentes ne sont évidemment valables que lorsque tous les membres sont définis ; a, b, p et q sont quatre réels.

- **Addition** :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$

- **Duplication** :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

- **Linéarisation** :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

• **Transformation des produits en sommes** :

♡
$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big)$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)$$

• **Transformation des sommes en produit** :

♡
$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

✍ **Exercice 3** En admettant les deux premières égalités de gauche des formules d'addition, démontrer toutes les autres.

4.4 Angles associés

A partir des formules d'addition, on obtient aussi, en choisissant a et b convenablement les relations suivantes. On les retrouve facilement à l'aide du cercle trigonométrique mais, idéalement, il faut les connaître de façon immédiate, sans hésiter :

♡

Opposé	**Demi-tour**	**Supplémentaire**
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$	$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$	$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$	$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$

♡

Complémentaire	**Quart de tour**
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \operatorname{cotan}\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\operatorname{cotan}\theta$

Proposition 3

Pour tout n dans $\mathbb{Z}$ et tout θ dans $\mathbb{R}$, on a aussi :

$$\begin{cases} \cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos\theta \\ \sin(\theta + n\pi) = (-1)^n \sin\theta. \end{cases}$$

✍ **Exercice 4** Démontrer cette proposition au moyen d'une récurrence, mais attention, on rappelle qu'un énoncé de récurrence dépend d'un entier **naturel** !

4.5 Identité fondamentale et sa réciproque

Proposition 4

Pour tout réel θ, on a $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
Et réciproquement, si x et y sont deux réels vérifiant $x^2 + y^2 = 1$, alors il existe un réel θ tel que :

$$\begin{cases} x &= \cos\theta \\ y &= \sin\theta \end{cases}$$

Remarque 2 Cette identité traduit l'appartenance du point de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ au cercle unité dont l'équation est $x^2 + y^2 = 1$.
Le réel θ apparaissant dans la réciproque ci-dessus n'est pas unique, il l'est si on lui impose d'appartenir à un intervalle de longueur 2π. S'il s'agit de l'intervalle $]-\pi, \pi]$, on parle de *mesure principale* de l'angle θ, s'il s'agit de l'intervalle $[0, 2\pi[$, on parle de *plus petite mesure positive.*

Corollaire 1

Pour tout réel θ dont le cosinus est non nul, on a :

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

✍ **Exercice 5** *Paramétrisation par* $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Soit $x \in \left]-\pi, \pi\right[$. On pose $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
Exprimer $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de t.

✍ **Exercice 6** *Réduction de* $a\cos x + b\sin x$ $(a, b, x$ réels$)$

L'idée est d'utiliser une formule d'addition en écrivant

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

En posant $X = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $Y = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, on constate que $X^2 + Y^2 = 1$.
On dispose donc d'un réel φ tel que $X = \cos\varphi$ et $Y = \sin\varphi$, de sorte qu'en posant $A = \sqrt{a^2+b^2}$:

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x) = A\cos(x-\varphi)$$

Réduire de la sorte les expressions :

1. $\cos x - \sin x$
2. $3\cos x + \sqrt{3}\sin x$

5 Fonctions usuelles

5.1 Généralités sur les fonctions

Définition 1 (informelle)

Une *fonction* réelle est une transformation qui à un réel x associe **au plus un** réel noté $f(x)$, appelé *image de* x *par* f lorsqu'il existe.

Définition 2

On appelle *ensemble de définition* de la fonction f l'ensemble des réels x qui ont une image par f, on note $\mathcal{D}_f$ cet ensemble.

Notation 3 On écrit plus simplement $f : x \longmapsto f(x)$ pour désigner la fonction qui à x associe $f(x)$.

Remarque 3 Il ne faut pas confondre la **fonction** f avec **l'expression** $f(x)$ qui désigne un réel, évaluation en x, réel donné, de la fonction f.
Cette distinction est **fondamentale**, confondre fonction et expression revient à confondre un hachoir et un steack haché : x serait la viande, f le hachoir et $f(x)$ le steack haché.
On n'écrit jamais : « la fonction $f(x)$ est continue (dérivable, croissante, etc.) », autant d'adjectifs qui sont des attributs relatifs à des fonctions. Par exemple, on dira « la fonction $x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ », ou « la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ », mais pas « x^2 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ ».

✍ **Exercice 7** Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes (il pourra s'avérer utile de dresser des tableaux de signes) :

$$f : x \longmapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad g : x \longmapsto \sqrt{x^2 + x - 6}$$

Remarque 4 Certains auteurs et professeurs font la distinction entre la notion de fonction et celle d'*application* f *de* I *dans* J, (où I et J sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$) qui à tout réel de I associe **exactement un** réel noté $f(x)$ de J, et que l'on note ainsi :

$$\begin{array}{rccc} f : & I & \longrightarrow & J \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

On dit que I est *l'ensemble de départ* de l'application f et J, son *ensemble d'arrivée*.
Les applications sont des fonctions particulières : leur ensemble de définition est systématiquement égal à leur ensemble de départ I.

Vocabulaire : Deux applications f et g sont dites *égales* si et seulement si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée, et qu'elles procèdent à la même transformation c'est-à-dire : $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$.
Par exemple, les applications suivantes sont différentes :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} g : & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

Définition 3

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé, on appelle *courbe* de la fonction f l'ensemble noté $\mathcal{C}_f$ des points du plan de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$ où le réel x appartient à l'ensemble de définition de la fonction f.

Vocabulaire : On dit aussi *représentation graphique* ou encore de *graphe* de f.

Remarque 5 Dans la pratique, on trace l'**allure** de la courbe pour synthétiser visuellement les éléments obtenus lors de l'étude : points et tangentes particuliers, asymptotes, axe ou centre de symétrie, sens de variation, limites... Faire d'interminables tableaux de valeurs et représenter la série de points correspondante n'apporte strictement rien de plus et n'est pas un attendu. Nous vous demandons de mémoriser les représentations graphiques des fonctions usuelles dont exp, ln, sin, cos et tan pour en retenir presque toutes les informations connues sur ces fonctions

Définition 4
On dit que la fonction $f : I \longrightarrow J$ est une *bijection* (ou est *bijective*) de I dans J si, et seulement si, tout élément y de J **admet un unique** antécédent x dans I.

Remarque 6 Cela se reformule par : $\forall y \in J, \quad \exists! x \in I \ / \ f(x) = y.$
ou encore par :

pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet une unique solution dans I.

Définition 5 (bijection réciproque)
Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection.
Si y est un élément de J, son unique antécédent dans I par f est noté $f^{-1}(y)$. Cela définit une fonction f^{-1} dite **bijection réciproque de** f :

$$f^{-1} : \begin{array}{l} J \longrightarrow I \\ x \longmapsto \text{unique } x \text{ de } I \text{ tel que } y = f(x) \end{array}$$

Exemple 4 Voir plus loin la fonction exp et ln !

5.2 Fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente

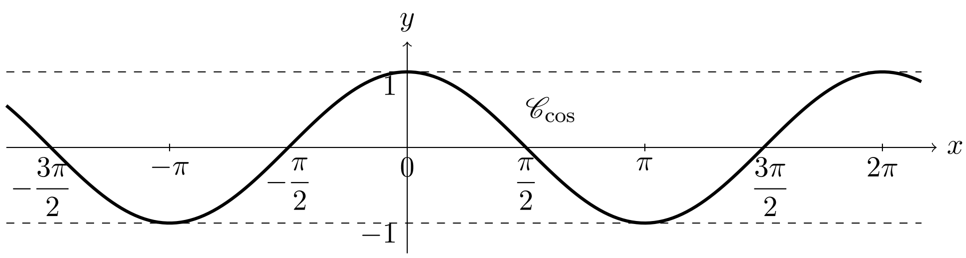
5.2.1 Les fonctions cosinus et sinus

On rappelle que ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont 2π-périodiques, sin est une fonction impaire et cos une fonction paire.
Elles sont dérivables (et donc continues) sur $\mathbb{R}$ et on a :

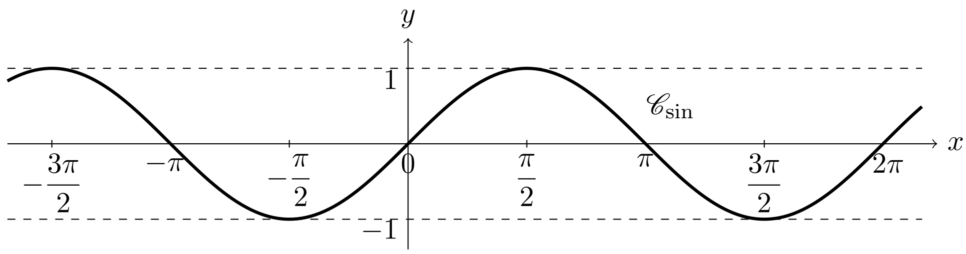
$$\heartsuit \quad \boxed{\cos' = -\sin \quad \text{et} \quad \sin' = \cos}$$

Voici leur courbe respective en repère orthonormé.
Remarquons que $3 < \pi < 3,2$ entraîne que : $\boxed{1,5 < \dfrac{\pi}{2} < 1,6}$.

Remarque 7 Les équations des tangentes en 0 sont respectivement $y = 1$ pour le graphe de cos et $y = x$ pour celui de sin.



Courbe de la fonction cosinus dans un repère orthonormé



Courbe de la fonction sinus dans un repère orthonormé

5.2.2 La fonction tangente

• La fonction tan est définie sur l'ensemble des réels qui ne sont pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier ; tan est π-periodique et impaire. Elle est dérivable (et donc continue) en tout point de son ensemble de définition et :

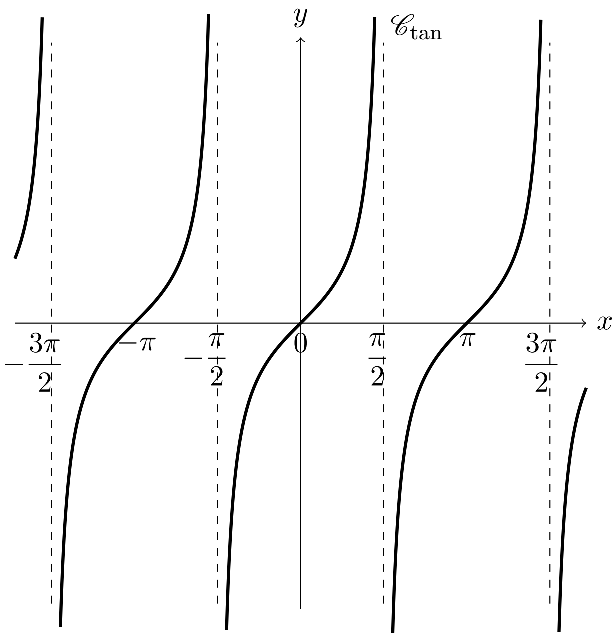
$$\heartsuit \quad \boxed{\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2}.$$

• Les limites à droite et à gauche des points en lesquels tan n'est pas définie sont connues et sont infinies, on a notamment :

$$\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

Observer que le graphe suivant de la fonction tan synthétise parfaitement ce qui précède.

Remarque 8 L'équation de la tangente en 0 au graphe de tan est $y = x$.



Courbe de la fonction tangente dans un repère orthonormé

5.3 Fonctions exponentielle et logarithme népérien

5.3.1 La fonction exp

Définition 6
La fonction nommée *exponentielle* et noté exp est définie comme étant l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y$ avec la condition initiale que $y(0) = 1$.

Ainsi la fonction exp est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\heartsuit \quad \boxed{\exp' = \exp \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1.}$$

On sait démontrer que la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\heartsuit \quad \boxed{\lim_{x \longrightarrow -\infty} \exp x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \exp x = +\infty.}$$

L'évaluation de la fonction exponentielle en 1 est un réel nommé *nombre de Neper* et noté e, dont on se doit de connaître l'approximation suivante :

$$\heartsuit \quad \boxed{\mathrm{e} = \exp 1 \simeq 2.71 \text{ à } 10^{-2} \text{ près soit encore : } 2.70 \leqslant \mathrm{e} \leqslant 2.72}$$

Remarque 9 L'équation de la tangente en 0 à la courbe de exp est $y = x + 1$. On sait démontrer que le graphe de exp est situé au-dessus de cette tangente en 0, autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp x \geqslant x + 1$$

Proposition 5

La fonction exp transforme la structure additive en stucture multiplicative autrement dit si a et b sont deux réels :

$$\heartsuit \quad \boxed{\exp(a+b) = \exp a \times \exp b}.$$

Remarque 10 $\exp 2 = \exp(1+1) = \exp 1 \times \exp 1 = \mathrm{e} \times \mathrm{e} = \mathrm{e}^2$, puis par récurrence (à rédiger par vos soins) pour tout n de $\mathbb{N}$, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$, on introduit dès lors une nouvelle **notation** pour désigne $\exp x$ à savoir e^x pour tout x réel (et pas seulement entier).

Proposition 6

Pour tous réels a et b, on a : ♡ $\boxed{\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b}$ (déjà dit plus haut), ♡ $\boxed{\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}}$, ♡ $\boxed{\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}}$, ♡ $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \ (\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}}$ et ♡ $\boxed{\mathrm{e}^{\frac{a}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^a}}$.

5.3.2 La fonction ln

Définition 7

La fonction exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$. Sa bijection réciproque se nomme fonction *logarithme néperien* et se note ln. Cette fonction est donc une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel y strictement positif associe x, l'unique antécédent dans $\mathbb{R}$ de y par exp autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in]0, \infty[, \ [x = \ln y \Leftrightarrow y = \mathrm{e}^x]$$

Les propriétés des bijections réciproques l'une de l'autre nous permettent d'écrire :

$$\heartsuit \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \ln(\mathrm{e}^x) = x \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, \ \mathrm{e}^{\ln x} = x}$$

En particulier : ♡ $\boxed{\ln 1 = 0 \text{ et } \ln(e) = 1}$.
On sait démontrer que ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ (et donc continue sur $]0, +\infty[$) et :

$$\heartsuit \quad \boxed{\ln' = \mathrm{inv}}$$

où inv désigne la fonction inverse (considérée seulement ici sur $]0,+\infty[$) qui à tout x associe $\dfrac{1}{x}$. Ainsi, ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et on sait démontrer que :

$$\heartsuit \quad \boxed{\lim_{x\longrightarrow 0} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x\longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty.}$$

Remarque 11 L'équation de la tangente en 1 au graphe de ln est : $y = x-1$. On sait démontrer que le graphe de ln est situé en-dessous de cette tangente en 1, autrement dit :

$$\heartsuit \quad \boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln x \leqslant x-1}.$$

Proposition 7

La fonction ln transforme la structure multiplicative en stucture additive autrement dit si a et b sont deux réels **strictement positifs** :

$$\heartsuit \quad \boxed{\ln(a\times b) = \ln a + \ln b}.$$

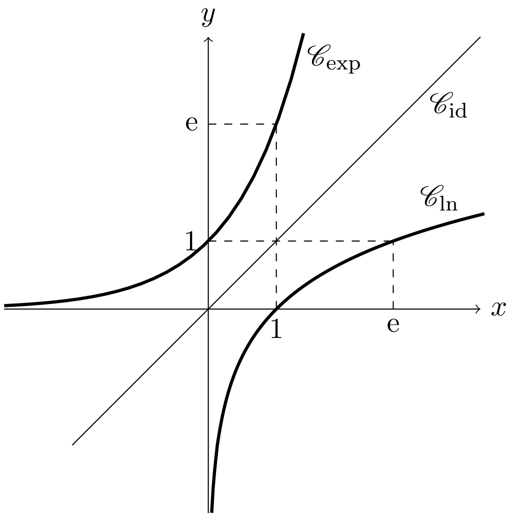
Mise en garde : $\ln(a\times b)$ a un sens si a et b sont tous les deux strictement négatifs (car leur produit est strictement positif, mais ln n'est définie ni en a ni en b)

Proposition 8

Soit a et b deux réels strictement positifs, on a :

$$\heartsuit \quad \boxed{\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \forall n\in\mathbb{Z}, \ln(a^n) = n\ln a \quad \text{et} \quad \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln a.}$$

Voici les graphes de exp, ln, et id, a fonction qui à x associe x. Observez la symétrie axiale.



5.4 Fonctions hyperboliques

On définit ici trois fonctions qui ne sont pas au programme de terminale, nous en avons bien conscience, mais leur étude est très simple, nous vous laissons démontrer en autonomie les propriétés énoncées. Les démontrer se révèle être très instructifs et vous permettra de mémoriser plus facilement leurs propriétés. Vous les retrouverez fréquemment dans les exercices de fin de ce poly et tout au long de l'année. N'hésitez pas à nous poser des questions à la rentrée si besoin.

5.4.1 Définitions

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{ch}\,(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} & (\textbf{cosinus hyperbolique}, \text{ parfois noté } \cosh) \\ \mathrm{sh}\,(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} & (\textbf{sinus hyperbolique}, \text{ parfois noté } \sinh) \end{array}}$$

5.4.2 Quelques formules

On tire de la définition que pour tout réel x,

$$\boxed{\mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{sh}\,(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}\,(x) - \mathrm{sh}\,(x) = \mathrm{e}^{-x}.}$$

et par produit :

$$\boxed{\mathrm{ch}^2\,(x) - \mathrm{sh}^2\,(x) = 1.}$$

Remarque 12 On a aussi, en divisant par $\mathrm{ch}^2 x$: $\boxed{\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\,(x)} = 1 - \mathrm{th}^2\,(x)\,.}$

où $\mathrm{th}\,(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ (fonction **tangente hyperbolique**, parfois notée $\tanh$).

5.4.3 Etude de ch et sh

- ch est paire et sh est impaire.
- On a directement la dérivabilité de ch et sh et : $\boxed{\mathrm{ch}' = \mathrm{sh} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}' = \mathrm{ch}}$
- Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, on a : $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{ch} = \lim\limits_{+\infty} \mathrm{sh} = +\infty$.

Par parité, il vient $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{ch} = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{sh} = -\infty$.

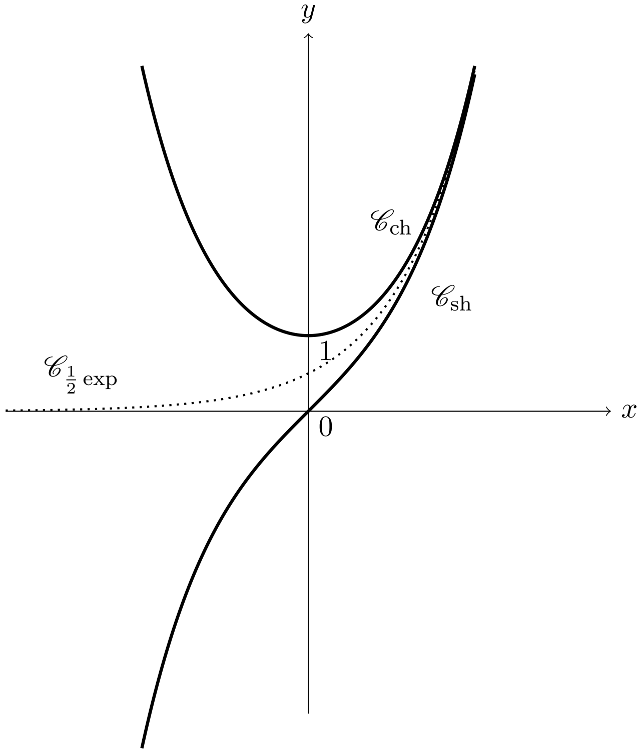
Comme il est clair que $\underline{\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \mathrm{ch}\,(x) > 0}$, on en déduit les variations de sh, d'abord puis celle de ch ensuite :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}\,(x)$		$+$		$+$	
$\mathrm{sh}\,(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

puis

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}\,(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}\,(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

et leurs courbes.



Courbe de la fonction cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et de $\frac{1}{2}\exp$ dans un repère orthonormé.

Remarque 13

- $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\, x \geqslant 1}$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}\, x < \mathrm{ch}\, x \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x = 0.$

5.5 Des fonctions dérivées

On rappelle que si f est définie sur I et que a appartient à I le nombre dérivé en a de f, **si il existe**, est la limite du taux de variation :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

On rappelle aussi que si f est dérivable en a, alors f est nécessairement continue en a et que la réciproque est fausse (par exemple la fonction $x \longmapsto |x|$, qui est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

• Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et f dérivable sur $\mathbb{R}$, on a pour tout réel x

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(ax+b)] = af'(ax+b)}$$

En particulier

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(-x)] = -f'(-x)}$$

• Si u est une fonction dérivable sur I, on a :

$$\heartsuit \quad \boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad (u^n)' = nu'u^{n-1} \quad \text{et} \quad (\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u}.$$

Si en outre, u ne s'annule pas sur I, alors

$$\heartsuit \quad \boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}} \quad \text{et} \quad \heartsuit \quad \boxed{\left(\ln |u|\right)' = \frac{u'}{u}}$$

Si en outre, u est strictement positive sur I, alors

$$\heartsuit \quad \boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

5.6 Des primitives

• On rappelle que toute fonction continue sur un **intervalle** I admet des primitives sur I, c'est à dire des fonctions F dérivables sur I telles que $F' = f$.
Les primitives de f sur I diffèrent entre elles seulement d'une constante, c'est-à-dire que si F_0 est l'une d'entre elles, alors les autres sont de la forme :

$$F = F_0 + C \quad \text{où } C \text{ est un constante réelle.}$$

Pour le **calcul des primitives uniquement**, on emploie la notation **abusive**

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$$

qui désigne l'expression d'une primitive quelconque de f pour la variable x. On comprendra cette notation plus loin.
On écrira par exemple $\displaystyle\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$.

Remarque 14 La notation rigoureuse (à utiliser dès que l'on raisonne, en particulier à l'écrit), est : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, où a est un réel quelconque de I, on sait démontrer que F est alors la primitive de f qui s'annule en a.

• Une intégrale de la fonction continue f sur le segment $[a, b]$ où a et b sont deux réels est définie comme étant la différence $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur ce segment, on note :

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F]_a^b = F(b) - F(a)}.$$

Mise en garde : Ne pas confondre une primitive (qui est une fonction) avec une intégrale (qui est un réel fixé).

• Pour finir, un tableau des primitives usuelles, sur des intervalles sur lesquels les fonctions f de la première colonne sont continues et u est une fonction dérivable, dont la fonction dérivée est continue :

Fonction $x \longmapsto f(x)$	*Une* primitive $x \longmapsto F(x)$
$e^{\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$
x^n où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin(ax+b)$ où $a \neq 0$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$ où $a \neq 0$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

$\frac{u'}{u}$ avec : $\forall x \in I,\ u(x) \neq 0$	$\ln\lvert u\rvert$
$\frac{u'}{u^n}$ avec : $\forall x \in I,\ u(x) \neq 0$, $n \geqslant 2$	$\frac{1}{(1-n)u^{n-1}}$
$u'u^n$ et $n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$u'e^u$	e^u
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

6 Inégalités

6.1 Régles élémentaires, majorations, minorations, encadrements

On considère a, b, c, d quatre réels.

6.1.1 Somme

$$\boxed{\text{Si } \left\{\begin{array}{l} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{array}\right. \quad \text{alors } a+c \leqslant b+d}$$

Mise en garde : ne jamais retrancher deux inégalités !
Néanmoins, on a pour les encadrements :

$$\boxed{\text{Si } \left\{\begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{array}\right. \quad \text{alors } a-d \leqslant x-y \leqslant b-c}$$

6.1.2 Produits

$$\boxed{\text{Si } \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant d \end{array}\right. \quad \text{alors } ac \leqslant bd}$$

Mise en garde : bien vérifier que les nombres sont **positifs**.

6.1.3 Quotients

$$\boxed{\text{Si } \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant a \leqslant c \\ 0 \leqslant d \leqslant b \end{array}\right. \quad \text{alors } \frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}}$$

Méthode : Pour majorer un quotient de réels **positifs**, on **majore** le numérateur et on **minore** le dénominateur.

6.1.4 Utilisation des fonctions monotone ou strictement monotones

Soit f une fonction croissante sur l'intervalle I.
Si a et b sont dans I, et qu'on a $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
Pour les fonctions décroissantes, on renverse le sens de l'inégalité, on a : $f(a) \geqslant f(b)$.
Mise en garde : Si on souhaite des inégalités strictes, il faut s'assurer que les fonctions sont **strictement** monotones sur l'intervalle considéré.
Par exemple, si $0 < a < b$, on $a^2 < b^2$, $a^3 < b^3$, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. On a aussi $\ln a < \ln b$. et $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. par stricte croissance des fonctions carré, cube, racine et ln et par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$.
Mise en garde : Si $a < 0 < b$ alors $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$.
Mise en garde : Si $a < b$ sont de signes quelconques, on ne peut rien dire de a^2 et b^2 (par exemple -3 et 2)

Remarque 15 Comparer deux nombres **positifs** revient à comparer leurs carrés (leurs cubes, leurs racines...)

6.2 Des méthodes pour manipuler des inégalités

6.2.1 Différence

Pour montrer une inégalité, on étudie le signe de la différence des deux membres.

• Soit algébriquement, par exemple pour montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^2 \geqslant 4ab,$$

on pourra écrire :
Soient a et b deux réels, la différence des deux membres vaut :

$$(a+b)^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geqslant 0$$

On en déduit l'inégalité proposée.

Remarque 16 On considère en général la différence « plus grand membre » moins « plus petit membre » pour se ramener à des expressions positives.

• Soit à l'aide d'une étude de fonction, par exemple, pour montrer que :

$$\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x - 1,$$

on considère la fonction $f : x \longmapsto \ln(x) - (x-1)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle y est dérivable et :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

On en déduit le tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Par conséquent, $\forall x > 0,\ f(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire : $\forall x > 0,\ \ln x \leqslant 1 + x$.

6.2.2 Utilisation des règles élémentaires

Par exemple, pour montrer que si $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $0 < x - 2x^3 < \frac{1}{\sqrt{2}}$
On suppose : $x \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$. On écrit d'abord $x - 2x^3 = x\left(1 - 2x^2\right)$. On peut élever au carré l'encadrement positif $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$0 < x^2 < \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad 0 < 1 - 2x^2 < 1$$

La multiplication par l'inégalité positive $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ donne alors

$$0 < x\left(1 - 2x^2\right) < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ CQFD.}$$

6.2.3 Quotients

Pour montrer que la fonction $f : x \longrightarrow \dfrac{\sin^2(x)}{2+x^2}$ est majorée sur $\mathbb{R}$:
On a pour tout réel x :

$$0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 2 + x^2 \geqslant 2$$

Il vient immédiatement

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

6.2.4 Utilisation des quantités conjuguées

Par exemple, pour montrer que $f : x \longrightarrow \dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}$ est majorée sur $]0,+\infty[$, on peut rédiger ainsi :
Pour tout réel $x > 0$ on a :

$$f(x) = \frac{\cancel{4}+x^2-\cancel{4}}{x^2\left(\sqrt{4+x^2}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}+2} \leqslant \frac{1}{4}$$

En effet, en minorant le dénominateur (positif) :

$$4+x^2 \geqslant 4 \Longrightarrow \sqrt{4+x^2} \geqslant 2 \Longrightarrow \sqrt{4+x^2}+2 \geqslant 4$$

La fonction f est donc majorée par $\dfrac{1}{4}$ sur $]0,+\infty[$

6.3 Valeur absolue d'un réel

6.3.1 Définition

Si $x \in \mathbb{R}$, on note : $\boxed{\heartsuit \quad |x| = \max(-x,x)}$.

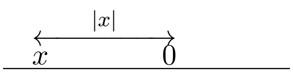
Autrement dit $\boxed{\heartsuit \quad \begin{cases} \text{si } x \geqslant 0, & |x| = x \\ \text{si } x \leqslant 0, & |x| = -x \end{cases}}$

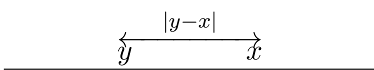
Remarque 17 $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant 0$. De plus, $|x| = \sqrt{x^2} = |-x|$.

6.3.2 Interprétation géométrique

$|x|$ s'interprète comme la distance notée $d(0,x)$ de x à 0.

$|y-x|$ s'interprète comme la distance notée $d(x,y)$ de x à y.





6.3.3 Propriétés élémentaires

Si x et x' sont deux réels, alors :

$\boxed{|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0}$ $\quad$ $\boxed{|xx'| = |x|\,|x'|}$ $\quad$ $\boxed{\left|\dfrac{x}{x'}\right| = \dfrac{|x|}{|x'|} \quad (\text{si } x' \neq 0)}$

6.3.4 Inégalité triangulaire

Proposition 9
Pour tous réels x, y, $\boxed{|x+y| \leqslant |x| + |y|}$.

✍ **Exercice 8** Démontrer ce résultat en considérant les carrés et en remarquant que $|x|^2 = x^2$ et $x \leqslant |x|$.

Remarque 18 On a seulement $\boxed{|x-y| \leqslant |x| + |y|}$.

6.4 Valeur absolue et encadrement

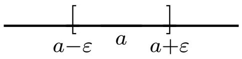
6.4.1 Intervalles centrés

Si : $\varepsilon > 0$, alors : $\boxed{|x| \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon}$.
Ainsi si : $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{|x - a| \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon}$$

• Interprétation numérique : on dit que x est **une approximation de a à ε près**.

• Interprétation géométrique : $\{x \in \mathbb{R} \ / \ |x - a| \leqslant \varepsilon\}$ est appelé **intervalle centré en a de rayon** ε.



6.4.2 Bornes et valeur absolue

Montrer que $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ est bornée sur I revient montrer que $|f|$ est majorée sur I
On emploie très fréquemment ce résultat dans les problèmes de majoration, car il permet de ne travailler que sur des nombres positifs.

Exemple 5 Montrons que $f : x \longmapsto \cos(x)\cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. On a pour tout réel x :

$$\begin{array}{rcl} |f(x)| & \overset{\text{IT}}{\leqslant} & |\cos(x)\cos(2x)| + |\cos(3x)| + |\cos(4x)| \\ & \leqslant & |\cos(x)|\,|\cos(2x)| + |\cos(3x)| + |\cos(4x)| \\ & \leqslant & 3 \end{array}$$

Remarques 19

- On a utilisé l'inégalité positive $|\cos\theta| \leqslant 1$ pour tout θ, puis on a multiplié les inégalités positives $|\cos(x)| \leqslant 1$ et $|\cos(2x)| \leqslant 1$, et enfin on a sommé des inégalités.
- Si on n'avait pas utilisé l'inégalité triangulaire, on aurait multiplié des inégalités dont les membres ont des signes inconnus, et on se serait donc exposé à de lourdes erreurs
- On ne majore ou minore jamais « à l'intérieur » d'une valeur absolue, mais on applique en premier lieu l'inégalité triangulaire qui permet de ne manipuler que des termes positifs. La remarque n'a de sens que si les expressions en jeu ont des signes pouvant varier.

7 Calculs élémentaires de limites

7.1 Des méthodes pour les formes indéterminées

Mise en garde. On n'écrit jamais $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = \ldots$ sans s'être assuré de **l'existence** de la limite.

Remarque 20 Dans $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)$, la lettre x est muette. On peut aussi écrire $\lim\limits_{a} f$.

Méthode générale. Dans une forme indéterminée, comme son nom l'indique, le problème est dans la forme. La méthode générale est donc de transformer les expressions jusqu'à obtenir des formes « déterminées », ou des expressions dont on connaît la limite (taux de variations, « croissances comparées »).

7.1.1 Les « croissances comparées » classiques

Soit n un entier naturel non nul. On doit connaître :

- Exponentielle versus puissances en $+\infty$:

$$\heartsuit \quad \boxed{\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = 0}$$

- logarithme versus puissance en $+\infty$:

$$\heartsuit \quad \boxed{\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0}$$

- Logarithme versus puissance en 0 :

$$\heartsuit \quad \boxed{\lim_{x\longrightarrow 0} x^n \ln x = 0}$$

7.1.2 Transformations d'expressions

Exemple 6 **Par factorisation.** Déterminons : $\lim\limits_{x\longrightarrow-1} \dfrac{x^4-1}{x^3+1}$.
Pour tout $x \neq -1$, on a

$$\frac{x^4-1}{x^3+1} = \frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)} = \frac{(x+1)(x-1)\left(x^2+1\right)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)} = \frac{(x-1)\left(x^2+1\right)}{x^2-x+1}$$

Il s'ensuit que $\boxed{\text{la limite cherchée existe et vaut } -\frac{4}{3}}$.

Exemple 7 **Au moyen de la quantité conjuguée.** Déterminons : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.
Pour tout $x \geqslant 0$,

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Il s'ensuit que $\boxed{\text{la limite cherchée existe et vaut } 0}$.

7.1.3 Utilisation des dérivées

Un rappel :
La fonction f est **dérivable** en a si et seulement si :

$$\boxed{\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)}$$

Exemple 8 Déterminer $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(\mathrm{ch}x)}{x}$.
Considérons $f : x \longmapsto \ln(\mathrm{ch}x)$. Comme $f(0) = \ln(\mathrm{ch}0) = \ln 1 = 0$, on reconnait le taux de variations :

$$\forall x \neq 0, \ \frac{\ln(\mathrm{ch}x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Or f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' : x \longmapsto \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \mathrm{th}x$, donc la limite cherchée existe et

$$\boxed{\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(\mathrm{ch}x)}{x} = f'(0) = 0}$$

Exemple 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$.
On reconnait le taux de variation en 1 de la fonction $f : x \longmapsto x^n$, qui a pour dérivée $f' : x \longmapsto nx^{n-1}$, donc la limite existe et

$$\boxed{\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = f'(1) = n}$$

• A donner sans hésitation ♡ : les limites suivantes sont des limites de taux de variations, vérifier cette affirmation avant de les mémoriser :

$$\boxed{\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

7.1.4 Translations vers 0

• **Un rappel** : $\boxed{\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \longrightarrow 0} f(a+h) = \ell}$, ainsi pour se ramener à une limite en 0, on remplace la variable x qui est « proche » de a par l'expression $a + h$ où la variable h est « proche » de 0.

Exemple 10 Calculer : $\lim_{x \longrightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x)$.
Comme la limite (indéterminée) n'est pas en 0, on pose (presque systématiquement) $x = \frac{\pi}{2} + h$, soit $h = x - \frac{\pi}{2}$. Alors pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$,

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x) = h \tan\left(\frac{\pi}{2} + h\right) \overset{\text{angles associés}}{=} -\frac{h}{\tan(h)}$$

Or le taux de variation $\frac{\tan(h)}{h}$ tend vers $\tan'(0) = \frac{1}{\cos^2(0)} = 1$ en 0, donc

$$\boxed{\lim_{x \longrightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} -\frac{h}{\tan(h)} = -1}$$

7.1.5 Changements de variable

Observez la rédaction attendue dans ces deux exemples :

Exemple 11 montrer que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ sachant que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.
Posons $y=\sqrt{x}\underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Alors $\forall x>0$

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=\frac{\ln\left(y^2\right)}{y}=2\frac{\ln(y)}{y}$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{y\longrightarrow+\infty}2\frac{\ln(y)}{y}=0}$$

Exemple 12 Déterminer $\lim\limits_{x\longrightarrow0}\dfrac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^4}$.
Posons $y=\dfrac{1}{x^2}\underset{x\longrightarrow0}{\longrightarrow}+\infty$. On a alors pour tout $x\neq0$

$$\frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^4}=y^2\mathrm{e}^{-y}=\frac{y^2}{\mathrm{e}^y}$$

Or on sait que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty$. On en déduit

$$\boxed{\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^4}=\lim_{y\longrightarrow+\infty}\frac{y^2}{\mathrm{e}^y}=0}$$

7.1.6 Mise en facteur du terme prédominant ou isolement de termes connus

Là encore, on vous laisse découvrir des exemples de rédaction.

Exemple 13 Déterminer $\lim\limits_{x\longrightarrow0}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.
On transforme l'expression pour $x>0$:

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=x\ln(x+1)-x\ln(x)$$

Or $\lim\limits_{x\longrightarrow0}x\ln(1+x)=0$ (évident) et $\lim\limits_{x\longrightarrow0}x\ln(x)=0$ (comparaison logarithme/puissance).
$\boxed{\text{La limite cherchée existe donc, et vaut } 0}$

Exemple 14 Déterminer $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2+1}$.
On essaie (artificiellement) d'isoler $\dfrac{\ln x}{x^2}$: pour tout $x>0$,

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2+1}=\frac{\ln(x(1+1/x))}{x^2+1}=\frac{\ln x+\ln(1+1/x)}{x^2+1}=\frac{\ln x}{x^2\left(1+1/x^2\right)}+\frac{\ln(1+1/x)}{x^2+1}$$

Finalement

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2+1}=\frac{1}{1+1/x^2}\cdot\frac{\ln x}{x^2}+\frac{\ln(1+1/x)}{x^2+1}$$

Il n'est alors plus difficile de conclure à : $\boxed{\text{la limite cherchée existe et vaut } 0}$

7.1.7 Utilisation du théorème « des gendarmes » (appelé aussi « des encadrements »)

Exemple 15 Déterminer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x + 2\cos x}{\sqrt{x^2+1}}$.
On a pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$x - 2 \leqslant x + 2\cos x \leqslant x + 2$$

En divisant par le réel **strictement positif** $x^2 + 1$, on a donc l'encadrement

$$\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} \leqslant \frac{x+2\cos x}{\sqrt{x^2+1}} \leqslant \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$$

Or pour $x \geqslant 0$, $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1-2/x}{\sqrt{1+1/x^2}}$ et $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1+2/x}{\sqrt{1+1/x^2}}$, et les deux « encadrantes » ont donc pour limite 1 en $+\infty$. Le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\boxed{\text{la limite cherchée existe et vaut } 1}$$

• En mathématiques, on préfère majorer la valeur absolue qu'encadrer (cf. plus haut) : il n'y a qu'une égalité, on ne manipule que des réels positifs, et on verra qu'en plus on peut généraliser aux complexes et à leurs modules. D'où la méthode extrêmement courante suivante :

Méthode : pour montrer que $\lim\limits_{a} f = 0$, il suffit de trouver une fonction g **positive** de **limite nulle** telle que $\boxed{|f(x)| \leqslant g(x)}$ au voisinage de a.

Exemple 16 Déterminer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
On écrit pour tout $x \neq 0$:

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leqslant |x|$$

Le théorème des gendarmes (ou du gendarme masqué) permet de conclure directement :

$$\boxed{\text{la limite cherchée existe et vaut } 0}$$

7.2 Etudes des branches infinies

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ autrement dit sur un domaine contenant un intervalle de type $[a, +\infty[$ où a est un réel. On note sa courbe $\mathcal{C}_f$ en repère orthonormé. On donne certes les résultats au voisinage de $+\infty$, mais ils sont également valables en $-\infty$.

Définition 8
La droite $\mathcal{D}$ d'équation : $y = ax + b$ est la droite *asymptote oblique* à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ lorsque :

$$\boxed{\lim_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0}$$

autrement dit si l'expression de f s'écrit :

$$\boxed{f(x) = ax + b + \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0}$$

Plus généralement, pour g une autre fonction, on dit que $\mathcal{C}_g$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ lorsque $\lim\limits_{+\infty} (f - g) = 0$.
Méthode pratique : on calcule $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, et si celle-ci existe et vaut a, avec a réel, on détermine s'il existe un réel b tel que : $b = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) - ax)$

Exemple 17 Déterminer l'équation de la droite asymptote à la courbe de $f : x \longmapsto \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.
On a pour tout x différent de 0 et de 1 :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1+3/x+3/x^2+1/x^3}{1-2/x+1/x^2}$$

Donc $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.
On regarde alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)-x$: pour tout x différent de 0 et de 1 :

$$f(x)-x = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-2x+1} - x = \frac{5x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{5+2/x+1/x^2}{1-2/x+1/x^2}$$

Donc $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x)-x = 5$: On conclut que $\mathcal{C}_f$ admet une droite asymptote d'équation $y = x+5$ en $\pm\infty$.

8 Une liste d'exercices à chercher pour la rentrée

Les exercices suivants reposent sur ce qui précède et vos acquis du lycée. Ils seront corrigés, dans la mesure du possible, au cours des premières semaines, il peut être judicieux de chercher au moins cinq exercices de chacune de ces 10 parties, soit au moins une cinquantaine. Il est déconseillé de dépasser 15 minutes de recherche par exercice, si vous ne trouvez pas, ne vous découragez pas, passez au suivant ! Les premiers exercices de chaque section sont en général plus élémentaires.

8.1 Divers

✍ **Exercice 9** Un peu d'orthographe
Réécrire les phrases suivantes en les complétant :

1. En r…nant par r…nce, on concl…fina…ment que la propri…est vraie pour tout entier.
2. Cardan a rés… les équations de deg…3. Les formules avaient été établ… auparavant par Tartaglia.
3. L'équation de la tang… en O à la courbe de sinus est $y = x$
4. Dans $\mathbb{R}^*$, le nombre 0 a été excl…. $\mathbb{R}^*$ n'est pas un interv…, mais il est incl… dans $\mathbb{C}$.
5. 6 est un nombre p…, 7 un nombre imp… $\sqrt{2}$ est un nombre ir…nel
6. Le logarithme est défi… pour tout réel strictement positif.
7. On déf… la racine cubique d'un réel a comme l'unique réel de cube a. On rés… donc l'équation $x^3 = a$.
8. $\binom{n}{k}$ se lit « k parm… n »

✍ **Exercice 10** Vrai ou faux ou mal posé (dans ce cas reformuler correctement l'assertion) ?

1. Soit a un réel positif. La racine carrée de a est le nombre dont le carré vaut a.
2. $|-x| = x$ et $\sqrt{x^2} = x$.
3. Si $a + \mathrm{i}b = a' + \mathrm{i}b'$, alors $a = a'$ et $b = b'$.
4. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} > 0$
5. La fonction $\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
6. Si $f'(x) = 0$ sur l'ensemble $\mathcal{D}$, alors f est constante sur $\mathcal{D}$.
7. (a) $\pi \approx 3,1418$
   (b) $\pi \approx 3$
   (c) $\pi \approx 200$

✍ **Exercice 11** Exprimer les énoncés suivants à l'aide du symbolisme mathématique, puis donner leur négation :

1. Il existe un réel strictement positif dont le cube est strictement négatif.
2. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation $x^3 = 2$ est inclus dans $]1, 2[$.
3. Tout entier naturel est pair ou impair.

✍ **Exercice 12** Traduire en langage naturel les énonces mathématiques suivants où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$;
2. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$;
3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$.

✍ **Exercice 13** Donner sans calcul l'équation de la droite passant par $A(a, b)$ et de coefficient directeur m réel.

✍ **Exercice 14** Pour m dans $\mathbb{R}$, soit $p_m : x \longmapsto x^2 + mx + 1$. Déterminer, selon la valeur de m, le nombre de racines réelles de p_m.

✍ **Exercice 15** Soit $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ la solution positive de l'équation :

$$x^2 - x - 1 = 0 \ (E)\,.$$

Calculer φ^2 et $\dfrac{1}{\varphi}$ uniquement à l'aide de (E).

✍ **Exercice 16** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $(x-2)\left(x^2+1\right) = (x-2)(x+1)\,.$
2. $\dfrac{x+1}{x+2} \leqslant \dfrac{x^2-1}{x+2}.$

✍ **Exercice 17** Déterminer les couples de réels dont la somme vaut 3 et la différence vaut 13.

✍ **Exercice 18** Déterminer les couples de réels dont la somme vaut 3 et le produit vaut -4.

8.2 Trigonométrie

✍ **Exercice 19** Si $\theta \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$, que vaut $\cos\theta$?

✍ **Exercice 20** Calculer $p = \cos\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$, $s = \cos\dfrac{5\pi}{12} + \cos\dfrac{\pi}{12}$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

✍ **Exercice 21** Calculer la valeur exacte de $\tan\dfrac{\pi}{8}$, à l'aide d'une formule de duplication.

✍ **Exercice 22** Résoudre sur $\mathbb{R}$ et sur $]-\pi, \pi]$: $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$

✍ **Exercice 23** Résoudre sur $[0, \pi[$ l'équation $\tan(x) + \tan(4x) = 0 \ (E)$

8.3 Fonctions usuelles : calculs

✍ **Exercice 24** Calculer (si ces expressions existent) :

$$\mathrm{ch}(\ln 2)\,,\ \mathrm{sh}(\ln(3)) \quad \text{et} \quad \ln(\ln(\ln(2)))$$

✍ **Exercice 25** Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$
2. $\ln\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$
3. $\mathrm{sh}\,x = -1,\ \mathrm{ch}\,x = 2,\ \mathrm{sh}x = 2.$
4. $\mathrm{ch}\,x = \ln 2.$

✍ **Exercice 26** Résoudre le système : $\begin{cases} \mathrm{ch}\,x + \mathrm{ch}\,y = \frac{35}{12} \\ \mathrm{sh}\,x + \mathrm{sh}\,y = \frac{25}{12} \end{cases}$

✍ **Exercice 27** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x+1) - \mathrm{ch}(x) = 2\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{sh}\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

✍ **Exercice 28** Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\text{ch}^2 x$ et $\text{sh}^2 x$, (c'est-à-dire les écrire à l'aide d'expressions du type $\text{ch}\,(kx)$ et $\text{sh}\,(kx)$, sans exposants)

✍ **Exercice 29** Simplifier les expressions (en précisant pour quels réels x elles sont définies) :

1. $f\,(x) = \dfrac{\text{ch}(\ln x) + \text{sh}(\ln x)}{x}$
2. $g\,(x) = \text{sh}\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)$

✍ **Exercice 30** Soit t un réel et $x = \text{sh}t$. Simplifier l'expression $\sqrt{\sqrt{1+x^2} - x}$ à l'aide de t.

8.4 Fonctions usuelles : études et petits problèmes

✍ **Exercice 31** A l'aide d'une étude de fonction, résoudre l'équation :

$$\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = 1$$

(on commencera par réduire le domaine d'étude).

✍ **Exercice 32** Etudier la fonction $f : x \longmapsto \text{ch}\,(3x) - 3\text{ch}\,(x)$. Préciser l'intersection de la courbe avec l'axe (Ox) .

✍ **Exercice 33** Soit $f : x \longmapsto \sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x$.

1. Montrer qu'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis étudier les variations de f.
2. Discuter suivant les valeurs du réel m le nombre de solutions sur $[-\pi, \pi]$ de l'équation : $f(x) = m$.

8.5 Inégalités élémentaires

✍ **Exercice 34** Montrer que : $\forall x > 0,\ x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

✍ **Exercice 35** Montrer que : $\forall\,(a,b) \in \left]0, +\infty\right[,\ \dfrac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

✍ **Exercice 36** Montrer que : $\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a + b < 2 + a^2 + b^2$.
(**indication** : regarder $P\,(x) = x^2 - x + 1$)

✍ **Exercice 37** Montrer que :

$$\forall x \in [0,1]\,,\ 0 \leqslant x\,(1-x) \leqslant \frac{1}{4}.$$

En déduire que si a, b, c sont trois réels de l'intervalle $[0,1]$, alors :

$$\min\big(a\,(1-b)\,,\ b\,(1-c)\,,\ c\,(1-a)\big) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Indication : raisonner par l'absurde : si ce n'est pas le cas, que dire du produit de ces trois nombres ?

8.6 Inégalités et études de fonctions

✍ **Exercice 38** Encadrement de sinus au voisinage de 0

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin x \leqslant x$, et en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1\ , \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x.$$

2. En déduire des valeurs approchées de $\cos 0,01$ et $\sin 0,01$, en précisant l'erreur commise. Interpréter.

✍ **Exercice 39**

1. Montrer que $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin x < x < \tan x$, et en déduire les variations sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.
2. A l'aide de f, établir que pour tous réels a et b vérifiant $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$, on a l'encadrement :
$$\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi a}{2b}$$

8.7 Valeur absolue

✍ **Exercice 40** Résoudre l'inéquation $\left|1 + \dfrac{1}{x}\right| \geqslant 1$.

✍ **Exercice 41** Tracer la courbe de la fonction $f : x \longmapsto |x+1| - 2|x-2|$

✍ **Exercice 42** Montrer que si $|x| < 1$ et $|y| < 1$, alors $\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

8.8 Fonctions dérivées

✍ **Exercice 43** Calculer et simplifier les dérivées suivantes en précisant leur domaine de définition, de continuité et de dérivabilité (Ces trois domaines sont *a priori* différents, par exemple, la fonction racine est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$).

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$
2. $g : x \longmapsto \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$
3. $h : x \longmapsto \dfrac{\operatorname{ch}(x)}{x^n\sqrt{x}}$

✍ **Exercice 44** Soit $f : x \longmapsto x^2 - a$ et $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Montrer que l'abscisse de l'intersection de l'axe (Ox) et de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 est $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{a}{x_0}\right)$

8.9 Primitives et intégrales

✍ **Exercice 45** Calculer les primitives suivantes (on indiquera l'intervalle de validité) :

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$
2. $\displaystyle\int \tan^2 x \ \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \cos(7x)\cos(9x) \ \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{5\,\mathrm{d}x}{(3x+1)^3}$
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)^5}$
6. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \ \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 2}} \ \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^4)^2} \ \mathrm{d}x$

✍ **Exercice 46** Trouver des réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

et en déduire $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ sur $]0, +\infty[$.

✍ **Exercice 47** Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} |\cos(2x)| \ \mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$
3. $K = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{e}^{1/x^2}}{x^3} \ \mathrm{d}x$

8.10 Limites

✍ **Exercice 48** Calculer les limites suivantes si elles existent :

1. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{x - \ln x}$
3. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2+4}$
4. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{x^3+8}{x^4-16}$
5. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}}{x}$
6. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(a+x)^n - a^n}{x} \qquad (a \in \mathbb{R})$
7. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \pi/3} \frac{\cos(3x) + 2\cos(x)}{3x - \pi}$
8. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \pi/4} \frac{2\cos^2 x - 1}{16x^2 - \pi^2}$
9. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{ch}(3x) - 3\mathrm{ch}(x)$
10. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln(x + \sin x)$

✍ **Exercice 49** Etudier la branche infinie en $+\infty$ de la courbe de C_f, avec :

1. $f : x \longmapsto \ln(\mathrm{ch} x)$
2. $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 + x + 2}$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{x^3+1}{x^2+1} + \ln\left(x^4+1\right)$
4. $f : x \longmapsto 2x + \dfrac{1}{x} + \sin x$

Préparez-vous à la Guerre Algébrique !

Ce document a été donné à des élèves de Première s'inscrivant en Terminale « scientifique » ; il a pour but d'aguerrir le futur étudiant en PTSI que vous êtes sur des choses aussi élémentaires que le calcul fractionnaire, la simplification d'écriture comportant des radicaux, le développement et factorisation d'écritures littérales ou encore la résolution d'équation se ramenant à du premier ou second degré.
Tout cela, en fin de Terminale, doit être maîtrisé par un futur candidat au concours de Grandes Ecoles : ce sont des choses élémentaires travaillées depuis le collège, le B.A.BA.
Dès septembre, vous devrez apprendre et pratiquer des choses bien plus difficiles, abstraites et techniques : vous ne pourrez pas vous payer le luxe de piétiner sur un calcul de discriminant ou la somme de deux fractions !
Faites-en un peu tous les jours pendant l'été. **Prenez l'habitude de ne plus utiliser la calculatrice**.

Les fractions

Dans la suite a et b sont des réels non nuls.

✍ **Exercice 50** Ecrire sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A=\frac{8}{12}\qquad B=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\qquad C=\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\qquad D=\frac{2}{5}-1\qquad E=3-\frac{7}{6}\qquad F=\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{3}{20}$$

✍ **Exercice 51** Ecrire sous la forme d'une fraction, la plus simple possible :

$$A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\qquad B=\frac{3}{2a}+\frac{5}{b}\qquad C=\frac{3}{2a}-\frac{1}{ab}$$

$$D=\frac{1}{2a}+\frac{1}{6a}+\frac{1}{15a}\qquad E=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\qquad F=\frac{2}{ab}+\frac{3}{a^2}+\frac{4}{b^2}$$

✍ **Exercice 52** Ecrire sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A=\frac{4}{3}\times\frac{7}{5}\qquad B=\frac{2}{5}\times\frac{5}{9}\qquad C=\frac{7}{8}\times\frac{6}{5}$$

$$D=\frac{-2}{5}\times\frac{3}{-7}\times\frac{-7}{2}\qquad E=7\times\frac{1}{11}\times\frac{3}{14}\qquad F=\frac{6}{35}\times\frac{14}{3}\times\frac{1}{2}$$

$$G=\frac{2^3}{5^2}\times\frac{3^5}{2^7}\times\frac{5^3}{3^3}\qquad H=\frac{14^4\times 6^3}{18^2\times 49}\qquad I=\frac{55^3\times 26^2}{65^3\times 44^2}$$

✍ **Exercice 53** Ecrire sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible :

$$A=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}\qquad B=\frac{1}{\frac{3}{5}}\qquad C=\frac{-4}{\frac{-2}{13}}\qquad D=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}\qquad E=\frac{3}{\frac{7}{2}}\qquad F=-\frac{\frac{-12}{49}}{\frac{-3}{-35}}$$

✍ **Exercice 54** Ecrire sous la forme d'une fraction, la plus simple possible :

$$A=\frac{b^2}{a^5}\times\frac{a^7}{b^3}\qquad B=\frac{\frac{b^2}{a^5}}{\frac{a^7}{b^3}}\qquad C=\frac{a^3}{b^2}\times\frac{3a^2}{b}\times\frac{b^7}{2a^4}$$

Exercice 55 Ecrire sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{2}{5} \qquad B = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} \qquad C = \frac{7}{3}\left(2 - \frac{11}{4}\right) \qquad D = \frac{1 + \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$E = \frac{-3}{5} \times \frac{5}{\frac{-6}{13}} \qquad F = \frac{4}{\frac{2}{3} - \frac{5}{6}} \qquad G = \frac{5}{7} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \qquad H = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}$$

Les racines carrées

N'utilisez pas la calculatrice. C'est l'occasion de réviser vos tables de multiplication.

Exercice 56 Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers naturels, b étant le plus petit possible :

$$\begin{array}{lllllllll}
\mathrm{A} & = & \sqrt{40} & = & \sqrt{4 \times 10} & = & \sqrt{2^2 \times 10} & = & 2\sqrt{10} \\
\mathrm{B} & = & \sqrt{99} & = & \sqrt{\cdots \times \dots} & = & \sqrt{\cdots \times \dots} & = & \dots\sqrt{\dots} \\
\mathrm{C} & = & \sqrt{54} & = & \sqrt{\cdots \times \dots} & = & \sqrt{\cdots \times \dots} & = & \dots\sqrt{\dots} \\
\mathrm{D} & = & \sqrt{63} & = & \sqrt{\cdots \times \dots} & = & \sqrt{\cdots \times \dots} & = & \dots\sqrt{\dots} \\
\mathrm{E} & = & \sqrt{32} & = & \sqrt{\cdots \times \dots} & = & \sqrt{\cdots \times \dots} & = & \dots\sqrt{\dots} \\
\mathrm{F} & = & \sqrt{288} & = & \sqrt{\cdots \times \dots} & = & \sqrt{\cdots \times \dots} & = & \dots\sqrt{\dots} \\
\mathrm{G} & = & \sqrt{845} & = & \sqrt{\cdots \times \dots} & = & \sqrt{\cdots \times \dots} & = & \dots\sqrt{\dots} \\
\mathrm{H} & = & \sqrt{847} & = & \sqrt{\cdots \times \dots} & = & \sqrt{\cdots \times \dots} & = & \dots\sqrt{\dots}
\end{array}$$

Exercice 57 Simplifier :

$$A = \sqrt{\frac{9}{7}} = \dots \qquad B = \sqrt{\frac{16}{5}} = \dots \qquad C = \sqrt{\frac{2}{9}} = \dots \qquad D = \sqrt{\frac{5}{36}} = \dots$$

Exercice 58 Ecrire sans $\sqrt{\dots}$ au dénominateur :

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} = \dots \qquad B = \frac{14}{\sqrt{7}} = \dots \qquad C = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dots \qquad D = \frac{1}{\sqrt{2}} = \dots \qquad E = \sqrt{\frac{7}{4}} = \dots$$

Exercice 59 Utiliser la quantité conjuguée pour faire disparaître la racine au dénominateur :

1. $\dfrac{2}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \dots$
2. $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}} = \dots$
3. $\dfrac{-3}{5-\sqrt{2}} = \dots$
4. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = \dots$
5. $\dfrac{\sqrt{5}-3}{3+\sqrt{5}} = \dots$

✍ **Exercice 60** Réduire les expressions :

$A = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ $\qquad$ $B = 5\sqrt{5} - 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + \sqrt{5}$

$C = 3\sqrt{7} - 3\sqrt{5} - 5\sqrt{7} + 7\sqrt{5}$ $\qquad$ $D = -4\sqrt{11} + 11\sqrt{13} + 13\sqrt{11}$

✍ **Exercice 61** Calculer les carrés ou produits :

$A = \left(\sqrt{5}\right)^2$ $\qquad$ $B = \left(5\sqrt{2}\right)^2$ $\qquad$ $C = \left(-2\sqrt{3}\right)^2$ $\qquad$ $D = \left(2\sqrt{11}\right)^2$

$E = 7\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$ $\qquad$ $F = 2\sqrt{5} \times 5\sqrt{7}$ $\qquad$ $G = 3\sqrt{2} \times 4\sqrt{5}$ $\qquad$ $H = 7\sqrt{3} \times (-2\sqrt{3})$

✍ **Exercice 62** Ecrire le plus simplement possible :

$A = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $B = \dfrac{2}{\sqrt{3}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $C = \dfrac{4}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{1+\sqrt{2}}$

$D = (1 + 2\sqrt{5})(2 - 5\sqrt{5})$ $\qquad$ $E = (1 + 3\sqrt{2})(1 - 3\sqrt{2})$ $\qquad$ $F = (3 + 7\sqrt{2})(2\sqrt{2} - 11)$

$G = 2\sqrt{7} + \sqrt{28}$ $\qquad$ $H = 4\sqrt{3} - \sqrt{48}$ $\qquad$ $I = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{98} - 2\sqrt{242}$

$J = \sqrt{1 + \dfrac{4}{5}}$ $\qquad$ $K = \left(\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}\right)^2$

Les puissances

a, b et c sont des réels non nuls.

✍ **Exercice 63** Ecrire sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible :

$A = 7^{-1}$ $\qquad$ $B = 2^3 \times 3^{-2}$ $\qquad$ $C = \dfrac{2^9}{2^5}$

$D = \dfrac{2^{-3}}{5^{-2}}$ $\qquad$ $E = \left(\dfrac{3}{2^2}\right)^2$ $\qquad$ $F = \left(2^{-4} \times 5^2\right)^2$

✍ **Exercice 64** Ecrire sous la forme d'une puissance de a :

$A = a^7 \times a^2 \times a^5$ $\qquad$ $B = \dfrac{1}{a^3 \times a^4}$ $\qquad$ $C = \dfrac{a^{-5} \times a^2}{a^3 \times a^{-7}}$

$D = \left(a^{-2} \times a^7\right)^3$ $\qquad$ $E = \dfrac{(a^7)^3}{(a^{-2})^{-6}}$ $\qquad$ $F = \left(\dfrac{a^{-3}}{a^5}\right)^7$

✍ **Exercice 65** Ecrire sous la forme $a^n b^p c^q$ avec n, p et q entiers relatifs :

$A = \dfrac{a^2 \times b^5 \times c^7}{a^3 \times b^2 \times c^2}$ $\qquad$ $B = \dfrac{1}{b^3} \times \dfrac{ac}{b^2} \times \dfrac{a^3b^2}{c^4}$ $\qquad$ $C = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 \times \dfrac{a^{-2}}{c^{-3}} \times \left(\dfrac{b^{-2}}{c^3}\right)^2$

✍ **Exercice 66** Ecrire sous forme d'une seule fraction :

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} \qquad B = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \qquad C = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$$

$$D = \frac{1}{a^2b^5} + \frac{1}{a^3b^3} \qquad E = \frac{2a}{b^3c^2} + \frac{3b}{a^2c^3} \qquad F = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

✍ **Exercice 67** Factoriser à l'aide d'un facteur commun :

$A = 3a^2 + 6a$ $\qquad B = 4ab - 6a^2$ $\qquad C = a^3b^2 + a^4b + a^2b^3$

$D = 6a^5b^3 - 2a^4 + 14a^2b$ $\qquad E = a^2b^6c + a^3bc^4 + ab^3c^2$ $\qquad F = 15a^5b^3c^2 - 35a^2b^6c^4 + 10a^5b^4c^2$

Réduction, développement et factorisation

✍ **Exercice 68** Réduire :

$A = 2x \times 5x$ $\qquad B = (-7x) \times 3x$ $\qquad C = 3x^2 \times (-x)$

$D = 7x^2 \times 2x^2$ $\qquad E = (-5x) \times (-2x^7)$ $\qquad F = 3x \times 2x^2 \times (-x^3)$

$G = 2x + 3x - 4x$ $\qquad H = x^2 + x - 3x^2$ $\qquad I = x - x \times x$

$J = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x$ $\qquad K = x - \frac{x}{3}$ $\qquad L = 0,1x^2 + \frac{9x^2}{10}$

✍ **Exercice 69** Développer puis réduire :

$A = x(3 - 5x)$ $\qquad B = -2(x - 3)$ $\qquad C = -x(x - 1)$

$D = (5x + 1)(2x + 3)$ $\qquad E = (4x - 5)(7x - 1)$ $\qquad F = (2x + 5)(7x - 3)$

$G = (-4x - 6)(2x - 1)$ $\qquad H = -2x(x - 1)(x + 3)$ $\qquad I = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$

✍ **Exercice 70** Développer et réduire :
$A = (x - 8)(x^2 + 3x + 5)$ $\qquad B = (3 - 2x + 5x^2)(4x + 1)$ $\qquad C = (5x - 1)(-x^2 - x + 2)$

✍ **Exercice 71** Ecrire sous la forme d'un seul quotient (les dénominateurs sont supposés non nuls) :

$$A = \frac{2}{x+3} + \frac{1-3x}{x+2} \qquad B = \frac{4-3x}{2x+5} - \frac{2x^2}{7-3x} \qquad C = \frac{4-3x}{x} - \frac{1+2x}{x^2}$$

✍ **Exercice 72** Développer à l'aide d'une identité remarquable :

$A = (2x + 3)^2$ $\qquad B = (4x - 5)^2$ $\qquad C = (2x + 5)(2x - 5)$

$D = (8x - 11)^2$ $\qquad E = (x - 8)^2$ $\qquad F = (-3 - \sqrt{2}x)(-3 + \sqrt{2}x)$

✍ **Exercice 73** Factoriser :

$A = 3x + 6$ $\qquad B = 2a - 4b$ $\qquad C = 3x^2 + x$

$D = x^5 - x^4$ $\qquad E = 3xy - x^2$ $\qquad F = ax^3 - a^5b^4$

✍ **Exercice 74** Factoriser :

$A = (5x+1)(2x+3) + (5x+1)(x+2)$ $\quad$ $B = (4x-5)(7x-1) - (4x-5)(3x+4)$

$C = (2x+5)(7x-3) + (2x+5)$ $\quad$ $D = (4x-6)(2x-1) + (2x-3)(8x-11)$

$E = (x-8)(5+3x) - (x-8)(7-x)$ $\quad$ $F = (3-2x)(4x+1) + (x+1)(-2x+3)$

$G = (2x+3)^2 + (2x+3)(x+2)$ $\quad$ $H = (4x-5)(7x-1) - (4x-5)^2$

✍ **Exercice 75** Factoriser à l'aide d'une identité remarquable :

$A = x^2 - 1$ $\quad$ $B = 4x^2 - 9$ $\quad$ $C = (3x+1)^2 - 25$

$D = (2-5x)^2 - 9x^2$ $\quad$ $E = x^2 + 2x + 1$ $\quad$ $F = 4x^2 - 4x + 1$

$G = 9 + 18x + 9x^2$ $\quad$ $H = 25x^2 - 100x + 100$ $\quad$ $I = 2x^2 - \sqrt{24}x + 3$

✍ **Exercice 76** Factoriser dans $\mathbb{R}$ en utilisant le discriminant quand c'est possible :
$A = x^2 - 3x - 10$ $\quad$ $B = 2x^2 + x - 1$ $\quad$ $C = 3x^2 - 7x + 4$

✍ **Exercice 77** Factoriser l'expression A dans $\mathbb{R}$ en ayant au préalable cherché une racine évidente : $A = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$. Puis résoudre l'équation $A = 0$.
Indication : factoriser A par $x - \alpha$ ou α est une racine de A.

Equations et inéquations dans $\mathbb{R}$

✍ **Exercice 78** Résoudre les équations suivantes :

1. $2x + 3 = 0$
2. $-3x + 5 = 0$
3. $-x + 8 = 0$
4. $12x - 4 = 0$
5. $\frac{2}{3}x - 6 = 0$
6. $-49 - 42x = 0$

✍ **Exercice 79** Résoudre les équations suivantes :

1. $3x - 5 + 7x = 6 - 2x$
2. $5x + 9 - 3x = 2x - 1 + x$
3. $2(1-3x) + 9 - 3x = 2x - 3(2+x)$
4. $3x + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x - 3$
5. $\frac{3x-1}{2} - \frac{7x-11}{6} = \frac{2x+7}{3}$

✍ **Exercice 80** Résoudre :

1. $(2x+3)(2x+1) = 0$
2. $(-x-3)(5x+2) = 0$
3. $2x(6x-3) = 0$
4. $-3x(1-4x)(7x+4) = 0$

✍ **Exercice 81** Résoudre :

1. $x^2 + x = 0$
2. $(x-1)^2 = (7x+3)^2$
3. $3(x+4) = 12$
4. $3x^2 = 7x$

✍ **Exercice 82** Résoudre :

1. $\frac{2x+8}{5-2x} = 0$
2. $\frac{3x+1}{6-5x} = 0$
3. $\frac{4x-6}{12-8x} = 0$

✍ Exercice 83 Résoudre :

1. $\dfrac{3x+1}{5-2x} = 3$
2. $\dfrac{3x-1}{6-5x} = 2$
3. $\dfrac{2x^2-5x-31}{x-3} = 2x$

✍ Exercice 84 Résoudre :

1. $\dfrac{2}{x-1} = \dfrac{5}{3}$
2. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{5}{3}$
3. $\dfrac{3}{x-1} = \dfrac{4}{1-2x}$

✍ Exercice 85 Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2x+3 > 0$
2. $-3x+5 \leqslant 0$
3. $-x+8 \geqslant 0$
4. $12x-4 > -3$
5. $\dfrac{2}{3}x - 6 < 0$
6. $-49-42x > 7$

✍ Exercice 86 Résoudre les inéquations suivantes à l'aide d'un tableau de signe :

1. $(2x+6)(3x-3) > 0$
2. $(-5x+10)(-x-3) \leqslant 0$
3. $\dfrac{3x}{x+9} > 0$
4. $\dfrac{-x+5}{x+1} \geqslant 0$

Vous pouvez maintenant goûter à un repos bien mérité !